Uta Freiberg
Peter Arzt

Universität Siegen
Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 6

Verzweigungs- und Erneuerungstheorie

Aufgabe 1

Es sei $\left(Z(t)\right)_{t\geq 0}$ ein Markov-Verzweigungsprozess und $\mu_2(t) = \mathbb{E}Z(t)^2 < \infty$ für alle $t \geq 0$. Die Erzeugendenfunktion der Anzahl der Nachkommen einer Person sei h, und der Wartezeitparameter sei λ. Wie in der Vorlesung sei $\alpha = \lambda(h'(1) - 1)$. Zeigen Sie, dass

$$\mu_2(t) = \begin{cases} \frac{h''(1)}{h'(1)-1} e^{2\alpha t} - \frac{h''(1)-h'(1)+1}{h'(1)-1} e^{\alpha t}, & \text{falls } h'(1) \neq 1, \\ \lambda h''(1)t + 1, & \text{falls } h'(1) = 1. \end{cases}$$

Aufgabe 2

Ein Vektor $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$ mit $\pi_j \geq 0$ und $\sum_j \pi_j = 1$ heißt *stationäre Verteilung* einer Kette X, wenn $\pi = \pi P(t)$ für alle $t \geq 0$. Es gilt, dass dann $\pi = \pi P(t)$, für alle $t \geq 0$, äquivalent ist zu $\pi G = 0$ (z.B. Grimmet, Stirzaker: *Probability and Random Processes*, S.261).

Ein *Geburts-Todes-Prozess* $X = \{X(t)\}_{t\geq 0}$ ist eine Markovkette in stetiger Zeit mit Generatormatrix

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \lambda_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, welche Bedingung an die λ_i und μ_i gestellt werden müssen, damit eine Stationäre Verteilung existiert und berechnen Sie diese.

Aufgabe 3

Betrachten Sie einen *Immigrations-Todes-Prozess*, das ist ein Geburts-Todes-Prozess mit $\lambda_n = \lambda$ und $\mu_n = n\mu$. Zeigen Sie, dass die Erzeugendenfunktion $F(s,t) = \mathbb{E}(s^{X(t)})$ gegeben ist durch

$$F(s,t) = \left(1 + (s-1)e^{-\mu t}\right) \exp\left(\rho(s-1)(1 - e^{-\mu t})\right)$$

falls $X(0) = 1$ und $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Hinweis: leiten Sie zunächst die Vorwärtsgleichung für F: $\frac{\partial F}{\partial t} = (s-1)\left(\lambda F - \mu \frac{\partial F}{\partial s}\right)$ her.