Uta Freiberg
Peter Arzt Universität Siegen
Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 5

Verzweigungs- und Erneuerungstheorie

Aufgabe 1

Sei $\lambda\mu > 0$ und sei X eine Markovkette in stetiger Zeit mit Zustandsraum $\{1, 2\}$ und Generatormatrix

$$G = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}.$$

(i) Schreiben Sie die Vorwärtsgleichung auf und lösen Sie sie um die Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{i,j}(t)$, $i, j \in \{1, 2\}$, zu erhalten.

(ii) Berechnen Sie G^n und bestimmen Sie damit $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} G^n$. Vergleichen Sie mit (i).

Aufgabe 2

Sei $\left\{X(t)\right\}_{t\geq 0}$ eine MK in stetiger Zeit mit Zustandsraum $\mathbb{Z}$, Wartezeitparametern $\lambda(i) = \lambda > 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ und eingebetteter Kette mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$Q_{i,i+1} = Q_{i,i-1} = \frac{1}{2}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Die Kette starte in 0. Sei T die Zeit, die der Prozess im Zustand $m \in \mathbb{Z}$ verbringt bis er zum ersten Mal wieder den Zustand 0 erreicht. Bestimmen Sie die Verteilung von T.

Aufgabe 3

Sei i ein transienter Zustand einer MK in stetiger Zeit X mit $X(0) = i$. Zeigen Sie, dass die Gesamtzeit, die der Prozess in i verbringt, exponentialverteilt ist.