Uta Freiberg
Peter Arzt

Universität Siegen
Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 2

Verzweigungs- und Erneuerungstheorie

Aufgabe 1

Sei $(Z_n)_n$ ein Galton-Watson Prozess mit $\mathbb{E}Z_1 < \infty$ und $\eta = \mathbb{P}(Z_n \to \infty)$. Zeigen Sie, dass $G_n(t) \uparrow \eta$ für $n \to \infty$, falls $t \in [0, \eta)$ und $G_n(t) \downarrow \eta$ für $n \to \infty$, falls $t \in (\eta, 1)$.

Aufgabe 2

Sei $(Z_n)_n$ ein Galton-Watson Prozess mit $\mathbb{P}(Z_1 = k) = 2^{-k-1}$ für $k \geq 0$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(Z_n \leq 2yn \,|\, Z_n > 0) \to 1 - e^{-2y}$ für $n \to \infty$ mit $y > 0$.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die erzeugende Funktion G_n, und leiten Sie dann mit deren Hilfe eine explizite Formel für $\mathbb{P}(Z_n = k)$, $k \geq 1$, her.

Aufgabe 3

Betrachten Sie einen GW Prozess mit $\mathbb{P}(Z_1 = k) = q^k p$ wobei $\mu = \frac{q}{p} > 1$. Zeigen Sie, dass die bedingte Verteilung von $\dfrac{Z_n}{\mu^n}$, gegeben $Z_n > 0$, gegen die Exponentialverteilung mit Parameter $1 - \dfrac{1}{\mu}$ konvergiert.

Hinweis: Drücken Sie dazu zunächst die bedingte charakteristische Funktion von Z_n/μ^n

$$\mathbb{E}\Big(e^{it\frac{Z_n}{\mu^n}} \,\Big|\, Z_n > 0\Big)$$

mit Hilfe der erzeugenden Funktion G_n von Z_n aus.

Wir nehmen immer an, dass $Z_0 = 1$ ist.