Uta Freiberg
Universität Siegen

zu bearbeiten bis: 23. 11. 2012

Wintersemester 2012/2013

Stochastische Analysis

4. Übungsblatt

Achtung: Bei jedem stochastischen Integral auf diesem Blatt mache man sich vorher klar, warum es definiert ist.

Aufgabe 1

Sei $(B_t, \tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung im $\mathbb{R}^2$. Man zeige:

$$\int_0^t B_s d\tilde{B}_s = B_t\tilde{B}_t - \int_0^t \tilde{B}_s dB_s, \qquad t \geq 0.$$

Was passiert, wenn B und $\tilde{B}$ nicht unabhängig sind?

Aufgabe 2

Man beweise die sogenannte *Itô–Formel mit Zeitabhängigkeit*: Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard–Brownsche Bewegung und $f \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$. Dann gilt für alle $t \geq 0$:

$$f(t, B_t) - f(0,0) = \int_0^t f(s, B_s) dB_s + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) \right) ds.$$

Aufgabe 3

Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard–Brownsche Bewegung. Man zeige, dass die Prozesse $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(Y_t)_{t\geq 0}$, definiert durch

$$X_t := \mathrm{e}^{t/2} \cos B_t \qquad \text{und} \qquad Y_t := (B_t + t)\mathrm{e}^{-B_t - t/2}$$

Martingale sind.

Aufgabe 4

Sei $(B_t, \tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung im $\mathbb{R}^2$. Man setze $R_t := |(B_t, \tilde{B}_t)| = \sqrt{B_t^2 + \tilde{B}_t^2}$. Man zeige, dass

$$Z_t := \int_0^t \frac{B_s}{R_s} dB_s + \int_0^t \frac{\tilde{B}_s}{R_s} d\tilde{B}_s, \quad t \geq 0,$$

eine Standard–Brownsche Bewegung ist.

Aufgabe 5

Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard–Brownsche Bewegung. Man zeige mit Hilfe der Lévy–Charakterisierung, dass auch

$$W_t = \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s) dB_s, \quad t \geq 0,$$

auch eine Standard–Brownsche Bewegung ist.