

Wintersemester 2012/2013

## Verzweigungs- und Erneuerungstheorie

### 9. Übungsblatt

#### Aufgabe 8

Man schlieÙe folgende Lücken der Vorlesung:

1.  $\forall T \geq 0 : m(T) < \infty$ .
2.  $\mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow \infty} N_t = \infty) = 1$ .
3. Warum darf im Beweis von Lemma 2.2.4 das (OST) angewendet werden?

#### Aufgabe 9

Man beweise Satz 2.2.2.

#### Aufgabe 10

Man zeige, dass  $\mathbb{E}(\tau_{N_t+k}) = \mu(m(t) + k)$  für alle  $k \geq 1$  (vgl. Lemma 2.2.4). Man finde ein Gegenbeispiel, um zu zeigen, dass die Aussage nicht für  $k = 0$  gilt.

#### Aufgabe 11

Bezeichne  $v(t) := \mathbb{E}N_t^2$ . Man zeige (durch Rechnung mit Faltungen), dass

$$v(t) = m(t) + 2 \int_0^t m(t-s) dm(s).$$

Man bestimme die Funktionen  $m$  und  $v$  für den  $PP(\lambda)$  sowie für den Fall, dass die  $(X_i)_{i \geq 1}$  i.i.d. mit  $X_1 \sim U[0, 1]$ .

#### Aufgabe 12

Sei  $N$  ein  $PP(\lambda)$  (vgl. Bsp. 2.3.1). Man zeige für die totale Lebenszeit, dass

$$\mathbb{P}(D_t \leq x) = 1 - (1 + \lambda(t \wedge x))e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

und schlussfolgere, dass  $\mathbb{E}D_t = (2 - e^{-\lambda t})/\lambda$ .