Peter Arzt, Uta Freiberg
Universität Siegen

zu bearbeiten bis: 20. 12. 2012

Wintersemester 2012/2013

Verzweigungs– und Erneuerungstheorie

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Man zeige, dass die stochastische Folge aus Beispiel 1.1.6(a) stationär ist, und man berechne für die Beispiele 1.1.6. (a) und (b) Erwartungswert– und Kovarianzfunktion.

Aufgabe 2

Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine homogene Markovkette mit Zustandsraum $S = \{0, 1\}$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha, \beta \in [0, 1]$ mit $\alpha+\beta > 0$. Man berechne die Kovarianzfunktion $r(X_m, X_{n+m})$ sowie deren Grenzwert für $m \to \infty$, n fest. Unter welchen Bedingungen ist der Prozess $(X_n)_{n\geq 1}$ stationär? Man berechne außerdem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \mathbb{P}(X_r = 1).$$

Aufgabe 3

Es seien $(N_t)_{t\geq 0}$ ein $PP(\lambda)$ und T_0 eine davon unabhängige Zufallsgröße mit Verteilung $\mathbb{P}(T_0 = 1) = \mathbb{P}(T_0 = -1) = 1/2$. Wir setzen $T_t := T_0(-1)^{N_t}$. Man zeige, dass $(T_t)_{t\geq 0}$ stationär ist und berechne $r(T_s, T_{s+t})$ sowie Erwartungswert und Varianz des Integrals $X_t := \int_0^t T_s ds$.

Aufgabe 4

Seien $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. mit $X_1 \sim B(1, p)$ (also Bernoulli–verteilt mit Parameter $p \in (0, 1)$) die Zwischenankunftszeiten des Erneuerungsprozesses $(N_t)_{t\geq 0}$. Man bestimme die Verteilungen von $N_t, t \geq 0$ sowie von $C(s), E(s)$ und $D(s)$, $s > 0$ (vgl. Definition 1.2.6).

Aufgabe 5

Zwei Bankschalter seien mit je einer Bankkauffrau besetzt,deren Bedienzeiten jeweils exponentiell verteilt mit Parameter λ bzw. μ. Ein Kunde kommt in die Bank, findet beide Schalter durch Kunden A bzw. B besetzt und stellt sich vor einem der beiden Schalter an.

(a) Man wählt zufällig einen Schalter, wo man sich anstellt, kein späteres Wechseln sei erlaubt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man die Bank erst nach den Kunden A und B verlässt?

(b) Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit, wenn man sich bei der schnelleren Bankkauffrau (λ und μ sind uns also bekannt) anstellt?

(c) Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit, wenn man sich gar nicht anstellt, sondern zu dem Schalter geht, der zuerst frei wird?

Aufgabe 6

Wir betrachten ein $A/B/1/\infty$–Modell, wobei A ein $PP(\lambda)$ ist und $B \sim \mathrm{Exp}_\mu$ (und i.i.d. Bedienzeiten). Zur Zeit 0 sei ein Kunde im System, der sich gerade in Bedienung befindet. Man zeige

$$\mathbb{P}(\text{der nächste Kunde kommt vor der Zeit } t \text{ und findet den Schalter besetzt}) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1-\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}), \quad t \geq 0.$$

Aufgabe 7

Man will eine viel befahrene Straße an einer festen Stelle überqueren. Die Autos bilden einen $PP(\lambda)$ und man benötigt eine (bekannte) Zeit a, um die Straße zu überqueren. Sei τ der (zufällige) Zeitpunkt, zu dem man auf der anderen Seite der Straße ankommt. Man zeige, dass

$$\mathbb{E}\tau = \frac{\mathrm{e}^{a\lambda}-1}{\lambda}.$$

Jetzt stelle man sich eine zweispurige Straße vor mit Verkehr $PP(\lambda)$ bzw. $PP(\mu)$ vor. Man berechne jetzt wieder $\mathbb{E}\tau$ – und zwar für die beiden Fälle, dass man zwischen den Spuren stehen kann (Verkehrsinsel o.ä.) oder nicht. Was dauert länger?