Peter Arzt, Uta Freiberg
Universität Siegen

zu bearbeiten bis: 31. 01. 2013

Wintersemester 2012/2013

Verzweigungs– und Erneuerungstheorie

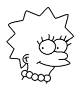
12. Übungsblatt

Aufgabe 20

Wir betrachten ein $M(\lambda)/M(\mu)/1$–Modell mit $\varrho = \lambda/\mu < 1$. Die Verteilung von Q_0 sei die stationäre Verteilung, gegeben durch $\pi_n = (1-\varrho)\varrho^n, n \geq 0$ (vgl. Satz 3.2.1(a) der Vorlesung). Sei W die (zufällige) Zeit, die ein neu ankommender Kunde auf seine Bedienung warten muss. Man zeige, dass

$$\mathbb{P}(W \leq x) = 1 - \varrho e^{-x(\mu-\lambda)}, \quad x \geq 0$$

und $\mathbb{P}(W = 0) = 1 - \varrho$.



Hier bietet es sich an, die Methode der *charakteristischen Funktionen* (= Fouriertransformation) zu benutzen.

Aufgabe 21

(Tandem–Warteschlangen–Modelle) Wir betrachten zwei Warteschlangen hintereinander – und zwar ein $M(\lambda)/M(\mu_1)/1$–Modell, wobei der Strom der fertig bedienten Kunden den Eingangsstrom für eine zweite Warteschlange bildet, deren Bedienzeiten untereinander iid. und vom Geschehen im ersten Server unabhängig $\sim \mathrm{Exp}_{\mu_2}$ seien. Es gelte $\lambda < \mu_1 \wedge \mu_2$. Das Modell möge sich im Gleichgewicht befinden. Man zeige

(a) Der Ausgangsstrom aus dem ersten System ist ein $PP(\lambda)$.

(b) Die Wartezeiten in beiden Schlangen sind nicht voneinander unabhängig.

Aufgabe 22

Wir betrachten ein $M(\lambda)/D(d)/1$–Modell mit $\varrho = \lambda d < 1$. Man zeige, dass die mittlere Schlangenlänge zu den Zeitpunkten, zu denen ein Kunde das System verlässt, im stationären Regime gleich $\varrho(2-\varrho)/2(1-\varrho)$ ist.

Aufgabe 23

Wir betrachten ein $M(\lambda)/M(\mu)/1$–Modell, sei B die (zufällige) *busy period*, d.h. diejenige Zeit, die der Server ununterbrochen arbeitet. Man zeige, dass für hinreichend kleine $s > 0$ gilt, dass

$$M_B(s) = \frac{(\lambda+\mu-s) - \sqrt{(\lambda+\mu-s)^2 - 4\lambda\mu}}{2\lambda}.$$