

Wintersemester 2011/2012

## Brownsche Bewegung I

### 9. Übungsblatt

#### Aufgabe 1

Beweisen Sie die Theoreme 7.1.2 und 7.1.3 aus der Vorlesung.

#### Aufgabe 2

Beweisen Sie das Lemma I aus der Vorlesung.

#### Aufgabe 3 (Kolmogorovsches 0-1 Gesetz für die Brownsche Bewegung)

Sei  $B = \{B(t) : t \geq 0\}$  eine Brownsche Bewegung.

Wir setzen für alle  $t \geq 0$

$$\mathcal{G}(t) := \bigvee_{s \geq t} \sigma\langle B(s) \rangle.$$

Die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{G}(t)$  beschreibt die Zukunft der Brownschen Bewegung zum Zeitpunkt  $t$ . Die *terminale*  $\sigma$ -Algebra wird definiert als

$$\mathcal{T}_\infty := \bigcap_{t \geq 0} \mathcal{G}(t).$$

- (a) Geben Sie nichttriviale Elemente von  $\mathcal{T}_\infty$  an.
- (b) Zeigen Sie: Für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $A \in \mathcal{T}_\infty$  gilt  $\mathbb{P}^x[A] \in \{0, 1\}$ .  
Wobei  $\mathbb{P}^x$  die Verteilung einer Brownschen Bewegung mit Startpunkt  $x$  ist.

#### Aufgabe 4

Verwenden Sie Aufgabe 3 um die Rekurrenz der Brownschen Bewegung zu zeigen.

Dass heißt, man zeige:

$$\mathbb{P}[\forall n \geq 0 \text{ existiert ein } t > n \text{ mit } B(t) = 0] = 1.$$