Uta Freiberg
Universität Siegen

zu bearbeiten bis: 13. 01. 2012

Wintersemester 2011/2012

Brownsche Bewegung I

8. Übungsblatt

Aufgabe 0 (ohne Abgabe)

Wiederholen Sie die Definition und Eigenschaften der bedingten Erwartung.

Aufgabe 1

Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $s \geq 0$. Man zeige folgende Eigenschaften des s–dimensionalen Hausdorffmaßes:

(a) Für alle $\lambda > 0$ gilt $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$.

(b) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine α-Hölder-stetige Abbildung mit Hölderkonstante c, so ist

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(A)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(A).$$

Dies impliziert insbesondere

$$\dim_H f(A) \leq \frac{\dim_H A}{\alpha}.$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, daß das null–dimensionale Hausdorffmaß mit dem Zählmaß übereinstimmt, d.h. zu zeigen ist für beliebiges $A \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{H}^0(A) = \begin{cases} \sharp A & \text{falls } A \text{ endlich} \\ +\infty & \text{falls } A \text{ unendlich} \end{cases}$$

Aufgabe 3

Es sei $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigien identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}|X_1| < \infty$, und $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(a) Zeigen Sie, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbb{E}[X_1|S_n] = \cdots = \mathbb{E}[X_n|S_n] = \frac{S_n}{n}.$$

(b) Zeigen Sie, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbb{E}[X_1|S_n, S_{n+1}, \ldots] = \frac{S_n}{n}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Aussage von Punkt (a) und Aufgabe 1 des 7. Übungsblattes.