Uta Freiberg
Universität Siegen

zu bearbeiten bis: 16. 12. 2011

Wintersemester 2011/2012

Brownsche Bewegung I

7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $\mathcal{G}_n = \mathcal{H} \vee \mathcal{G}$ für σ-Algebren $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$, und Z eine Zufallsgröße. Zeigen Sie dass aus $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ unabhängig, und $\mathcal{G}$ und Z unabhängig folgt

$$\mathbb{E}\big(Z|\mathcal{G}_n\big) = \mathbb{E}\big(Z|\mathcal{H}\big), \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine Teil-σ-algebra und $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ unabhängige Zufallsgrößen. Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}\big(XY|\mathcal{G}\big) = \mathbb{E}\big(X|\mathcal{G}\big) \cdot \mathbb{E}\big(Y|\mathcal{G}\big), \qquad \mathbb{P}\text{–f.s.}$$

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage zuerst für Indikatorfunktionen. Dann für allgemeine $X, Y \geq 0$ "hochziehen".

Aufgabe 3

Sei $B = \{B(t) : \ t \geq 0\}$ eine Standard–Brownsche Bewegung .

(a) Zeigen Sie, dass eine (zufällige) Familie von Partitionen

$$0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq \cdots \leq t_{k(n)-1}^{(n)} \leq t_{k(n)}^{(n)} = t$$

existiert, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k(n)} \big(B(t_j^{(n)}) - B(t_{j-1}^{(n)})\big)^2 = \infty, \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Hinweis: Verwenden sie die Konstruktion der Brownschen Bewegung (Theorem 2.2.15) um eine Partition aus dyadischen Intervallen der Form $[k2^{-n}, (k+1)^{-n}]$ zu konstruieren, so dass für jedes dieser Intervalle und beliebigem $M \geq 0$ gilt

$$\big|B\big((k+1)2^{-n}\big) - B\big(k2^{-n}\big)\big| \geq M2^{-n/2} \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

(b) Konstruieren Sie eine (deterministische) Folge von Partitionen

$$0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq \cdots \leq t_{k(n)-1}^{(n)} \leq t_{k(n)}^{(n)} = t$$

mit Gitterbreite $\triangle(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, so dass

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k(n)} \big(B(t_j^{(n)}) - B(t_{j-1}^{(n)})\big)^2 = \infty, \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Aufgabe 4

Sei $B = \{B(t) : t \geq 0\}$ eine Standard–Brownsche Bewegung . Betrachten Sie eine (nicht unbedingt verschachtelte) Folge von Partitionen

$$0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq \cdots \leq t_{k(n)-1}^{(n)} \leq t_{k(n)}^{(n)} = t$$

mit Gitterbreite $\triangle(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(a) Zeigen Sie,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k(n)} \left(B(t_j^{(n)}) - B(t_{j-1}^{(n)})\right)^2 = t, \tag{1}$$

im Sinne von Konvergenz im L^2.

(b) Es gelte zusätzlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k(n)} \left(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}\right)^2 < \infty.$$

Zeigen Sie, dass dann die Konvergenz in (1) auch $\mathbb{P}$-f.s. gilt.