Uta Freiberg
Universität Siegen

zu bearbeiten bis: 02. 12. 2011

Wintersemester 2011/2012

Brownsche Bewegung I

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $B = \{B_t, t \geq 0\}$ die Standard Brownsche–Bewegung.

„Reparieren“ Sie folgende Lücken aus der Vorlesung:

(a) Zeigen Sie den 2. Teil der Behauptung von Satz 3.3.2, d.h. zeigen Sie, daß $\mathbb{P}$–f.s. gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{B_n}{\sqrt{n}} = -\infty.$$

(b) Leiten Sie aus dem Gesetz des iterierten Logarithmus das Gesetz des iterierten Logarithmus für kleine Zeiten her. Das heisst, zeigen Sie

$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log|\log t|}} = 1 \qquad \mathbb{P}\text{–f.s.}$$

(c) Zeigen Sie im Beweis von Theorem 3.3.10, daß $\mathbb{P}$–f.s. $D_* X(0) = -\infty$ gilt.

(d) Zeigen Sie, daß die Brownsche Bewegung $\mathbb{P}$–f.s. von unbeschränkter Variation ist (Folgerung 3.4.4).

Aufgabe 2

Beweisen Sie: Falls X und Z unabhängige, symmetrische Variablen in $L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ sind, dann ist

$$\mathbb{E}\left[(X+Z)^2 | X^2 + Z^2\right] = X^2 + Z^2.$$

Hinweis: Eine reelle Zufallsgröße X heißt **symmetrisch**, falls X und $-X$ dieselbe Verteilung besitzen.

Aufgabe 3

Sei $B = \{B_t, t \geq 0\}$ die Standard Brownsche–Bewegung. Beweisen Sie: Für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\mathbb{P}[B \text{ besitzt eine Nullstelle im Intervall } (0,\varepsilon)] > 0.$$