Dr. Uta Freiberg

Sommersemester 2013

Fraktale Geometrie

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung: Sei $\mathcal{C}$ die Cantormenge.

(a) $\mathcal{C}$ enthält kein Intervall positiver Länge.

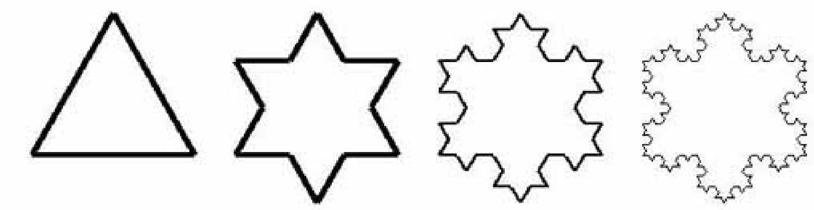
(b) $\mathcal{C}$ hat keine isolierten Punkte, d.h. $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, x \in \mathcal{C}$ gilt

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (\mathcal{C} \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

(c) $\mathcal{C}$ ist abgeschlossen, also kompakt.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Iterationsschritte zur Konstruktion einer Schneeflocke, deren Rand im Limes aus drei Kochkurven besteht (siehe Bild). Dabei entspreche das Dreieck dem Schritt $n = 0$. Geben Sie für alle $n \geq 0$ eine geschlossene Formel für die Länge der Kurve U_n und den von der Kurve eingeschlossenen Flächeninhalt F_n an. Diskutieren Sie den Grenzübergang $n \to \infty$.



Aufgabe 3

Analoge Konstruktion zur vorherigen Augabe, allerdings im Raum: Wir starten mit einem regulären Tetraeder ($n = 0$), teilen jede Seitenfläche in 4 gleichgroße gleichseitige Dreiecke und errichte über jedem mittleren Dreieck ein reguläres Tetraeder passender Seitenlänge (siehe Bild auf der nächsten Seite). Entwickeln Sie Formel für die Oberflächeninhalte O_n und Volumina V_n und diskutieren Sie den Grenzübergang $n \to \infty$.

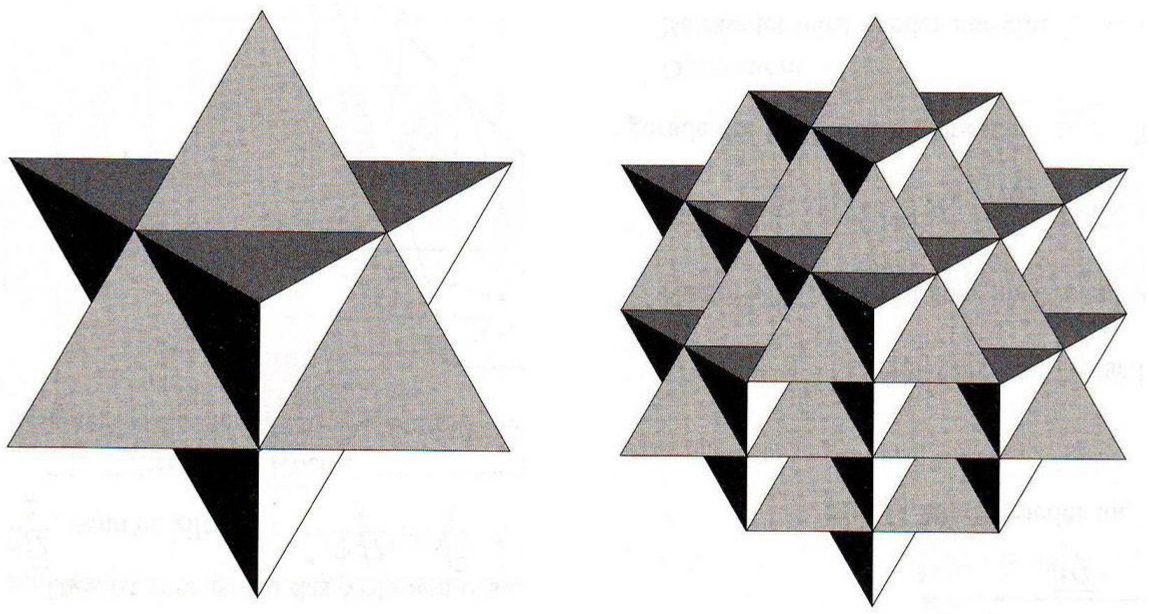


Bild zu Aufgabe 3 für $n = 1$ und $n = 2$.