Dr. U. Freiberg
Patricia Alonso Ruiz

zu bearbeiten bis: 22. 05. 2013

Sommersemester 2013

Fraktale Geometrie

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Rufen Sie sich die Konstruktion der Cantor-Menge $\mathcal{C}$ durch "Wischen" ins Gedächtnis. E_n bezeichne die $n-$te Stufe dieser Konstruktion und $\mathcal{C} = \bigcap_{n\geq 0} E_n$.
Nun definieren wir eine Folge von Funktionen $g_n\colon [0,1] \to [0,1]$ wie folgt:

(a) $g_n(0) = 0$ und $g_n(1) = 1$ für jedes $n \geq 0$.

(b) g_n hat Steigung $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ auf allen Intervallen der $n-$ten Stufe E_n.

(c) g_n hat Steigung 0 auf $[0,1] \setminus E_n$.

Man zeige, dass die Folge der Funktionen g_n für $n \to \infty$ punktweise gegen eine Funktion $g\colon [0,1] \to [0,1]$ konvergiert, die folgende Eigenschaften besitzt: $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, g ist nichtfallend und stetig. Man gebe explizit eine Menge $Z \subseteq [0,1]$ an, so dass g auf Z differenzierbar ist mit $g'(x) = 0$ und $\lambda^1([0,1] \setminus Z) = 0$.

Aufgabe 2

(a) Sei X ein metrischer Raum. Man zeige, dass für jede $A \subseteq X$ mit $\dim_H A < 1$ gilt: A ist total unzusammenhängend.

(b) Beweise, dass die Umkehrung i. A. nicht gilt: Konstruiere eine total unzusammenhängende Menge F mit $\dim_H F \geq 1$.

(*Zeige, dass es sogar eine total unzusammenhängende Menge F mit $\dim_H F = 2$ gibt.)

Aufgabe 3

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit stetigen Ableitungen. Zeige, dass $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$ für jede $F \subseteq \mathbb{R}$ gilt. (Tipp: Man nehme erstmal an, F sei beschränkt.)

Aufgabe 4

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^2$ gegeben und sei $F \subseteq \mathbb{R}$. Zeige: $\dim_H f(F) = \dim_H F$.