Dr. U. Freiberg
Patricia Alonso Ruiz zu bearbeiten bis: 15. 05. 2013

Sommersemester 2013

Fraktale Geometrie

4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $\alpha-$Hölderstetige Abbildung mit $\alpha > 1$. Zeige, dass f konstant sein muss.

Aufgabe 2

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Isometrie. Man beweise, dass dann f^{-1} existiert und auch Isometrie ist.

Aufgabe 3

(a) Sei $X \neq \emptyset$. Man zeige, dass $\tau_1 := \{\emptyset, X\}$ und $\tau_2 := \mathcal{P}(X)$ Topologien sind.

(b) Sei (X, d) metrischer Raum. Man zeige, dass die offene Mengen eine Topologie bilden.

(c) Sei $X \neq \emptyset$ versehen mit der *diskreten Metrik*, definiert für jedes $x, y \in X$ als

$$d(x,y) := \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Man bestimme die von d erzeugte Topologie.

(d) Man bestimme alle möglichen Topologien über der Menge $X = \{a, b, c\}$.

Aufgabe 4

Bezeichne $\mathcal{C}$ die Cantor-Menge und K die Kochkurve. Beweise, dass

(a) $\dim_{top} \mathcal{C} = 0$.

(b) $\dim_{top} K = 1$.

Aufgabe 5

(a) Sei (X, τ) ein topologischer Raum ($X \neq \emptyset$) und $Y \subseteq X$. Zeige: Y ist dicht in X genau dann, wenn Y jede offene Menge $U \subseteq X$ schneidet.

(b) Sei E die Menge der Endpunkte von den entfernten Intervallen bei der Konstruktion der Cantor-Menge $\mathcal{C}$. Man beweise, dass E dicht in $\mathcal{C}$ liegt.