Dr. Uta Freiberg
Patricia Alonso Ruiz

zu bearbeiten bis: 23. 04. 2013

Sommersemester 2013

Fraktale Geometrie

2. Übungsblatt

Aufgabe 1

Man beweise das Theorem 1.7. aus der Vorlesung!

Aufgabe 2

ei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $Y \subseteq X$ eine feste Teilmenge mit $\emptyset \neq Y \neq X$. Wir betrachten folgende äußere Maße:

$$\mu_1(A) = \begin{cases} \#A & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mu_2(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mu_3(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A = \emptyset \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mu_4(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mu_5(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A = \emptyset \\ 1 & \text{falls } A \cap Y \neq \emptyset,\ A \cap Y^c = \emptyset \\ 2 & \text{falls } A \cap Y = \emptyset,\ A \cap Y^c \neq \emptyset \\ 3 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man bestimme jeweils die μ_i–messbaren Mengen.

Aufgabe 3

Es seien X ein Raum, μ ein äußeres Maß auf X und $A \subseteq X$ eine feste Menge. Zeigen Sie:

(a) $\mu|_A$ ist ein äußeres Maß auf X.

(b) $\mathcal{X}_\mu \subseteq \mathcal{X}_{\mu|_A}$, wobei $\mathcal{X}_\nu$ die σ–Algebra der bezüglich eines äußeren Maßes ν-messbaren Mengen bezeichnet.

Aufgabe 4 (z.B. beim Fernsehen)

Schreiben Sie die Zeilen 0 bis 10 des Pascalschen Dreiecks nieder. Dabei soll in Zeile 0 eine Eins stehen, in Zeile 1 die Zahlen 1 und 1, in Zeile 2 die Zahlen 1,2 und 1 etc.

(a) Wie ist das Pascalsche Dreieck definiert? Wie berechnet man es? Wie viele Zahlen stehen in Zeile n? Wie lautet die Zeilensumme der Zahlen in Zeile n?

(b) Tragen Sie die Zeilen 11 bis 14 ein, benutzen Sie jedoch statt konkreter Zahlen nur die Buchstaben G und U für „gerade“ und „ungerade“. Färben Sie das gesamte Pascalsche Dreieck, indem Sie die ungeraden Zahlen schwärzen. Was fällt auf?

(c) Führen Sie die Aufgabe noch einmal auf dem Arbeitsblatt (Bild unten) durch, indem Sie nur die Zellen schwarz einfärben bzw. weiß lassen. Wie ist die Färbungsregel (Stichwort: *zelluläre Automaten*)? Wie viele Zeilen muss man einfärben, um die ersten 2 (3,4) Konstruktionsstufen des Sierpinskidreiecks zu erkennen?

(d) Führen Sie die Aufgabe erneut durch, jetzt aber mit einer Addition modulo 3, d.h. färben Sie eine Zelle schwarz, wenn Sie bei Division den Rest 1 oder 2 lässt; ist sie durch 3 teilbar, lassen Sie die Zelle weiß! Was erkennt man? Was vermuten Sie?