Beweis. a) Es sei $\eta(A)=0$. Wegen der Monotonie und Positivität von η ist dann für jedes $Q\subset X$ notwendig $\eta(Q\cap A)=0$ und daher $\eta(Q\cap A)+\eta(Q\cap A^c)=\eta(Q\cap A^c)\le\eta(Q)$. Ebenso schließt man im Falle $\eta(A^c)=0$.
b) ist klar, denn die Ungleichung (4.1) ist im Falle $\eta(Q)=\infty$ trivial.
c) Es seien A η-meßbar und $Q\subset X$. Dann liefert die endliche Subadditivität von η die Ungleichung $\eta(Q)\le\eta(Q\cap A)+\eta(Q\cap A^c)$. Zusammen mit (4.1) folgt hieraus (4.2). □

In der Form (4.2) ist die Meßbarkeitsdefinition besonders anschaulich: *Eine Menge $A\subset X$ ist genau dann meßbar, wenn sie jede Teilmenge $Q\subset X$ zerlegt in die disjunkten Teilmengen $Q\cap A$, $Q\cap A^c$, auf denen sich η additiv verhält.*

4.4 Satz (C. Carathéodory 1914). *Ist $\eta:\mathfrak{P}(X)\to\overline{\mathbb{R}}$ ein äußeres Maß, so ist*

$$\mathfrak{A}_\eta:=\{A\subset X : A\ \eta\text{-meßbar}\}$$

eine σ-Algebra und $\eta|\mathfrak{A}_\eta$ ein Maß.

Beweis. (1) *$\mathfrak{A}_\eta$ ist eine Algebra.*
Begründung: Offenbar ist $X\in\mathfrak{A}_\eta$, und da (4.1) symmetrisch ist in A und A^c, ist auch das Komplement jeder meßbaren Menge meßbar. Sind $A,B\in\mathfrak{A}_\eta$, so gilt für alle $Q\subset X$:

$$\begin{aligned}\eta(Q) &\ge \eta(Q\cap A)+\eta(Q\cap A^c)\\ &\ge \eta(Q\cap A)+\eta(Q\cap A^c\cap B)+\eta(Q\cap A^c\cap B^c)\\ &\qquad\text{(Meßbarkeitsbedingung für } B \text{ angewandt auf } Q\cap A^c)\\ &\ge \eta((Q\cap A)\cup(Q\cap A^c\cap B))+\eta(Q\cap(A\cup B)^c)\\ &\qquad\text{(endliche Subadditivität von } \eta)\\ &= \eta(Q\cap(A\cup B))+\eta(Q\cap(A\cup B)^c)\,,\end{aligned}$$

d.h. $A\cup B\in\mathfrak{A}_\eta$. Somit ist $\mathfrak{A}_\eta$ eine Algebra. –
(2) *Ist $(A_n)_{n\ge1}$ eine Folge disjunkter Mengen aus $\mathfrak{A}_\eta$, so ist $A:=\bigcup_{n=1}^\infty A_n\in\mathfrak{A}_\eta$ und*

$$\eta(A)=\sum_{n=1}^\infty\eta(A_n)\,. \tag{4.3}$$

Begründung: Für disjunkte $M,N\in\mathfrak{A}_\eta$ folgt aus (4.2) mit $Q\cap(M\cup N)$ anstelle von Q: $\eta(Q\cap(M\cup N))=\eta(Q\cap M)+\eta(Q\cap N)$, und mit Induktion folgt weiter

$$\eta\left(Q\cap\bigcup_{j=1}^n A_j\right)=\sum_{j=1}^n\eta(Q\cap A_j)\,. \tag{4.4}$$

Nach (1) ist $\bigcup_{j=1}^n A_j\in\mathfrak{A}_\eta$ und (4.4) liefert für alle $Q\subset X$, $n\in\mathbb{N}$:

$$\eta(Q)\ge\eta\left(Q\cap\bigcup_{j=1}^n A_j\right)+\eta\left(Q\cap\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right)^c\right)\ge\sum_{j=1}^n\eta(Q\cap A_j)+\eta(Q\cap A^c)\,,$$

also:

$$\eta(Q)\ge\sum_{j=1}^\infty\eta(Q\cap A_j)+\eta(Q\cap A^c)\ge\eta(Q\cap A)+\eta(Q\cap A^c)\ge\eta(Q)\,;$$

die beiden letzten Ungleichungen folgen aus der σ-Subadditivität von η. Insgesamt liefert die letzte Ungleichungskette für alle $Q\subset X$:

$$\eta(Q)=\sum_{j=1}^\infty\eta(Q\cap A_j)+\eta(Q\cap A^c)=\eta(Q\cap A)+\eta(Q\cap A^c)\,. \tag{4.5}$$

Hieraus folgt die Meßbarkeit von A, und (4.3) folgt aus (4.5) mit $Q:=A$. –
Aus (1), (2) ergibt sich nun: $\mathfrak{A}_\eta$ ist eine σ-Algebra und $\eta|\mathfrak{A}_\eta$ ein Maß. □

2. Der Fortsetzungssatz. Mit Hilfe von Satz 4.4 können wir nun folgenden Fortsetzungssatz beweisen:

4.5 Fortsetzungssatz. *Es seien $\mu:\mathfrak{H}\to\overline{\mathbb{R}}$ ein Inhalt auf dem Halbring $\mathfrak{H}$ über X, und für $A\subset X$ sei*

$$\eta(A):=\inf\left\{\sum_{n=1}^\infty\mu(A_n) : A_n\in\mathfrak{H}\ (n\in\mathbb{N})\,,\ A\subset\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right\} \tag{4.6}$$

(Infimumbildung in $[0,\infty]$; dabei sei $\inf\emptyset:=\infty$). Dann gilt:
a) *$\eta:\mathfrak{P}(X)\to\overline{\mathbb{R}}$ ist ein äußeres Maß, und alle Mengen aus $\mathfrak{H}$ sind η-meßbar.*
b) *Ist μ ein Prämaß, so gilt $\eta|\mathfrak{H}=\mu$. Insbesondere ist dann $\eta|\mathfrak{A}_\eta$ eine Fortsetzung von μ zu einem Maß auf einer σ-Algebra, die $\mathfrak{H}$ (und damit auch $\sigma(\mathfrak{H})$) umfaßt.*
c) *Ist μ kein Prämaß, so gibt es ein $A\in\mathfrak{H}$ mit $\eta(A)<\mu(A)$.*

Definition (4.6) läßt sich äquivalent umformulieren: Es sei $\mathfrak{R}$ der von $\mathfrak{H}$ erzeugte Ring. Dann ist nach Satz 1.6

$$\eta(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^\infty\nu(B_n) : B_n\in\mathfrak{R}\ (n\in\mathbb{N})\,,\ A\subset\bigcup_{n=1}^\infty B_n\right\}, \tag{4.7}$$

wobei ν die eindeutig bestimmte Fortsetzung von μ zu einem Inhalt auf $\mathfrak{R}$ bezeichnet, und da $\mathfrak{R}$ ein Ring ist, gilt auch

$$\eta(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^\infty\nu(B_n) : B_n\in\mathfrak{R}\text{ disjunkt }(n\in\mathbb{N})\,,\ A\subset\bigcup_{n=1}^\infty B_n\right\}. \tag{4.8}$$

Da jedes Element aus $\mathfrak{R}$ darstellbar ist als endliche disjunkte Vereinigung von Mengen aus $\mathfrak{H}$, folgt weiter

$$\eta(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^\infty\mu(C_n) : C_n\in\mathfrak{H}\text{ disjunkt }(n\in\mathbb{N})\,,\ A\subset\bigcup_{n=1}^\infty C_n\right\}. \tag{4.9}$$