abzählbaren topologischen Produkt $D^{\mathbb{N}}$. Faßt man hier D als zyklische Gruppe auf, so ist $D^{\mathbb{N}}$ eine kompakte abelsche topologische Gruppe, d.h.: C trägt die Struktur einer kompakten abelschen topologischen Gruppe (s. Beispiel VIII.3.2).

§ 9. Metrische äußere Maße und Hausdorff-Maße

„Um die Existenz von meßbaren Mengen darzulegen, führen wir jetzt eine vierte Eigenschaft des äußeren Maßes ein:
IV. *Sind A_1 und A_2 zwei Punktmengen, deren Entfernung $\delta \neq 0$ ist, so soll stets*
$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$
sein." (C. Carathéodory [2], S. 259)

1. Metrische äußere Maße. *In diesem ganzen Abschnitt sei (X,d) ein metrischer Raum.* Für $A, B \subset X$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ bezeichnen $d(A,B) := \inf\{d(x,y) : x \in A,\, y \in B\}$ den *Abstand von A und B*, $d(x,A) := d(\{x\},A)$ den *Abstand des Punktes $x \in X$ von A* und $d(A) := \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$ den *Durchmesser von A*; $d(\emptyset) := 0$. – Der folgende Begriff geht zurück auf C. Carathéodory [2], S. 259.

9.1 Definition. Das äußere Maß $\eta : \mathfrak{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt ein *metrisches äußeres Maß*, wenn für alle $A, B \subset X$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ mit $d(A,B) > 0$ gilt

$$\eta(A \cup B) = \eta(A) + \eta(B). \tag{9.1}$$

9.2 Beispiel. Es seien $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{P}(X)$ irgendein Mengensystem mit $\emptyset \in \mathfrak{C}$ und $\rho : \mathfrak{C} \to [0,\infty]$ eine Funktion mit $\rho(\emptyset) = 0$. Für $A \subset X$, $\delta > 0$ setzen wir

$$\eta_\delta(A) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) : A_n \in \mathfrak{C},\ d(A_n) \leq \delta \ (n \in \mathbb{N}),\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}, \tag{9.2}$$

wobei wieder $\inf \emptyset := \infty$. Im Beweis des Fortsetzungssatzes 4.5, a) haben wir schon bemerkt, daß η_δ ein *äußeres Maß* ist. Die Funktion $\delta \mapsto \eta_\delta(A)$ ist fallend; wir setzen

$$\eta(A) := \sup_{\delta > 0} \eta_\delta(A) \quad (A \subset X). \tag{9.3}$$

Für $A_n \subset X$ und alle $\delta > 0$ ist dann $\eta_\delta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \eta_\delta(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \eta(A_n)$, also $\eta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \eta(A_n)$, und η ist als *äußeres Maß* erkannt.

Es seien nun $A, B \subset X$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ und $d(A,B) > 0$. Zum Nachweis von (9.1) braucht nur noch $\eta(A \cup B) \geq \eta(A) + \eta(B)$ gezeigt zu werden. Dabei können wir gleich $\eta(A \cup B) < \infty$ annehmen. Es seien $0 < \delta < d(A,B)$ und $C_n \in \mathfrak{C}$, $d(C_n) \leq \delta$ $(n \in \mathbb{N})$, $A \cup B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Dann gibt es kein C_n, das sowohl mit A als auch mit B Punkte gemeinsam hat. Daher „zerfällt" $(C_n)_{n \geq 1}$ in Überdeckungen $(A_n)_{n \geq 1}$ von A, $(B_n)_{n \geq 1}$ von B, und es folgt $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(C_n) \geq \eta_\delta(A) + \eta_\delta(B)$, also $\eta_\delta(A \cup B) \geq \eta_\delta(A) + \eta_\delta(B)$, $\eta(A \cup B) \geq \eta(A) + \eta(B)$. *Ergebnis: η ist ein metrisches äußeres Maß.* (Dagegen braucht η_δ *kein* metrisches äußeres Maß zu sein; s. Aufgabe 9.2.) Für $X = \mathbb{R}^p$ liefert die vorangehende Konstruktion bei spezieller Wahl von $\mathfrak{C}$ und ρ viele Maße von grundlegender geometrischer Bedeutung (s. H. Federer [1]).

9.3 Satz. *Sind X ein metrischer Raum und $\eta : \mathfrak{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ ein äußeres Maß, so gilt $\mathfrak{B}(X) \subset \mathfrak{A}_\eta$ genau dann, wenn η ein metrisches äußeres Maß ist.*

Beweis. Ist $\mathfrak{B}(X) \subset \mathfrak{A}_\eta$, so gilt für alle $Q \subset X$ und alle offenen $G \subset X$:

$$\eta(Q) = \eta(Q \cap G) + \eta(Q \cap G^c). \tag{9.4}$$

Es seien nun $A, B \subset X$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ und $0 < \delta < d(A,B)$. Dann ist $G := \{x \in X : d(x,A) < \delta\}$ eine offene Menge mit $A \subset G$, $B \subset G^c$, und (9.4) mit $Q := A \cup B$ liefert (9.1).

Sei nun umgekehrt η ein metrisches äußeres Maß. Es genügt zu zeigen, daß jede *abgeschlossene* Menge $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ η-meßbar ist. Für $M \subset A^c$ und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $M_n := \{x \in M : d(x,A) \geq \frac{1}{n}\}$. Für alle $Q \subset X$ ist dann nach (9.1)

$$\eta(Q) \geq \eta((Q \cap A) \cup (Q \cap A^c)_n) = \eta(Q \cap A) + \eta((Q \cap A^c)_n).$$

Es bleibt zu zeigen: Für alle $M \subset A^c$ mit $\lim_{n\to\infty} \eta(M_n) < \infty$ gilt $\lim_{n\to\infty} \eta(M_n) \geq \eta(M)$. Zu diesem Zweck setzen wir $P_n := M_{n+1} \setminus M_n$ und beachten: Sind die im folgenden auftretenden Mengen nicht leer, so ist $d(M_n, M \cap M_{n+1}^c) \geq 1/n(n+1)$, also $d\left(\bigcup_{k=1}^{n} P_{2k}, P_{2n+2}\right) > 0$, und (9.1) liefert induktiv $\eta\left(\bigcup_{k=1}^{n} P_{2k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \eta(P_{2k})$. Diese Gleichung ist auch richtig, wenn gewisse P_n leer sind. Analog ist $\eta\left(\bigcup_{k=0}^{n} P_{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \eta(P_{2k+1})$, und wegen $\lim_{n\to\infty} \eta(M_n) < \infty$ folgt: $\sum_{n=1}^{\infty} \eta(P_n) < \infty$.

Nun ist $M = M_n \cup \bigcup_{k=n}^{\infty} P_k$ $(n \in \mathbb{N})$, denn A ist *abgeschlossen*, also

$$\eta(M) \leq \eta(M_n) + \sum_{k=n}^{\infty} \eta(P_k) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Hier konvergiert die Folge der Reihenreste für $n \to \infty$ gegen 0, und es folgt die Behauptung. □

9.4 Beispiel. Wir wenden die Konstruktion aus Beispiel 9.2 an auf $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ $(x,y \in \mathbb{R})$ und wählen als $\mathfrak{C}$ die Menge der beschränkten Teilmengen von $\mathbb{R}$, $\rho(A) := d(A)$ $(A \in \mathfrak{C})$. Dann können wir uns in (9.2) gleich auf Mengen der Form $A_n =]a_n, b_n]$ beschränken. Jedes $]a,b] \in \mathfrak{I}$ ist endliche disjunkte Vereinigung von Intervallen aus $\mathfrak{I}$, die alle höchstens die Länge δ haben. Daher hängt η_δ gar nicht von δ ab, und es ist $\eta = \eta_\delta$ gleich dem äußeren Lebesgueschen Maß auf $\mathbb{R}$. Satz 9.3 liefert nun einen weiteren Beweis der Lebesgue-Meßbarkeit jeder Borelschen Teilmenge von $\mathbb{R}$.