Uta Freiberg
Universität Siegen

zu bearbeiten bis: 18. 04. 2012

Sommersemester 2012

Stochastische Analysis

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Es sei $N \in \mathbb{N}$ und $(X_n)_{n\geq 0}$ eine symmetrische Irrfahrt mit Start in $x \in \{0, \dots, N\}$. Wir setzen

$$\tau := \inf\{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ oder } X_n = N\}.$$

Man zeige: $\mathbb{E}\tau = x(N - x)$.
Hinweis: Vollständige Induktion über N und das Optional Stopping Theorem benutzen!

Aufgabe 2

Man gebe einen stochastischen Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ an, dessen natürliche Filtration nicht rechtsstetig ist.

Aufgabe 3

Man zeige folgende Aussagen:

(a) Wenn $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(Y_t)_{t\geq 0}$ Supermartingale sind, so ist auch $(X_t \wedge Y_t)_{t\geq 0}$ Supermartingal.

(b) Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Submartingal und $a \in \mathbb{R}$. Dann ist $((X_t - a)^+)_{t\geq 0}$ auch ein Submartingal.

(c) Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Falls $\mathbb{E}\varphi(X_t)^+ < \infty$ für alle $t \geq 0$, dann ist $(\varphi(X_t))_{t\geq 0}$ ein Submartingal.

(d) Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal und $p \geq 1$. Falls $(|X_t|^p)_{t\geq 0}$ ein $\mathcal{L}^1$–Prozess ist, so ist $(|X_t|^p)_{t\geq 0}$ ein Submartingal.

Aufgabe 4

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard–Brownsche Bewegung und $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die von $(B_t)_{t\geq 0}$ erzeugte Filtration. Man zeige, dass dann

(a) $(B_t^3 - 3tB_t)_{t\geq 0}$ und

(b) $(B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2)_{t\geq 0}$

$\mathbb{F}$–Martingale sind.
Man verallgemeinere! Zu diesem Anlass wiederhole bzw. studiere man den Begriff der *Hermite–Polynome*.