Dr. U. Freiberg zu bearbeiten bis: 29. 06. 2012

Sommersemester 2012

Fraktale Geometrie

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $S = \{S_i \colon D \to D\}_{i=1}^N$ ein IFS, F der erzeugte Attraktor und sei Σ der zugehörige Coderaum. Weiterhin definiere die Abbildung $\pi \colon \Sigma \to F$ durch

$$\pi(w) := \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{w_1} \circ \cdots \circ S_{w_k}(A), \quad A \in \mathcal{H}(D),\ S_i(A) \subseteq A,\ i = 1, \ldots N.$$

Zeige: Für jedes $w \in \Sigma$ ist $\pi(w)$ nichtleer, einelementig und unabhängig von A.

Aufgabe 2

a) Man gebe IFS'e bestehend aus $3, 4$ bzw. 5 Abbildungen an, die sämtlich die (OSC) erfüllen und alle die klassische Dritt-Mittel-Cantormenge als Attraktor besitzen. Man überzeuge sich (ggf. numerisch), dass sich als Hausdorff Dimension jeweils $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ ergibt.

b) Finde zwei verschiedene IFS'e, die (OSC) erfüllen und die Koch-Kurve K erzeugen. Berechne dann $\dim_H K$.

Aufgabe 3

Sei $C_0 = [0,1] \times [0,1]$ ein Quadrat der Seitenlänge 1. Definiere die Abbildung $S \colon C_0 \to C_0$ durch

$$S(A) := \bigcup_{i=1}^{5} S_i(A),$$

wobei

$$S_1(x,y) := \left(\frac{x}{4}, \frac{y}{4}\right), \quad S_2(x,y) := \left(\frac{x+3}{4}, \frac{y}{4}\right), \quad S_3(x,y) := \left(\frac{x}{4}, \frac{y+3}{4}\right),$$

$$S_4(x,y) := \left(\frac{x+3}{4}, \frac{y+3}{4}\right), \quad S_5(x,y) := \left(\frac{x+1}{3}, \frac{y+1}{3}\right).$$

Setze für jedes $n \geq 1$, $C_n := S(C_{n-1})$ und $C := \bigcap_{n \geq 0} C_n$.

a) Zeichne C_0, C_1 und C_2.

b) Finde $h(C_0, C_1)$ und $h(C_1, C_2)$.

c) Für welche n gilt $h(C_n, C) \leq \frac{1}{100}$?

d) Zeige, dass $\{S_1, \ldots S_5\}$ (OSC) erfüllt und berechne $\dim_H C$.