Dr. U. Freiberg zu bearbeiten bis: 22. 06. 2012

Sommersemester 2012

Fraktale Geometrie

7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $\mathcal{A}$ eine Menge, bestehend aus endlich vielen (verschiedenen) Symbolen. Die Menge aller Wörter unendlicher Länge, die man mit diesen Symbolen schreiben kann, heißt *Coderaum* und sie wird mit $\Sigma := \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ bezeichnet. Diese Menge lässt sich auch wie folgt schreiben:

$$\Sigma := \{w = w_1 w_2 w_3 w_4 \ldots \,:\, w_i \in \mathcal{A}\}.$$

Sei nun $r \in \mathbb{R}$, $0 < r < 1$. Wir definieren die Abbildung $d_r \colon \Sigma \times \Sigma \to [0, \infty)$ durch

$$d_r(w, w') = r^k, \tag{1}$$

wobei

$$k := \inf\{n \geq 0 \,:\, w_{n+1} \neq w'_{n+1}\}.$$

Man zeige, dass (Σ, d_r) ein vollständiger metrischer Raum ist.

Aufgabe 2

Zwei Metriken d, d' auf einem Raum X heißen *äquivalent*, wenn ein Homömorophismus $\phi \colon (X, d) \to (X, d')$ existiert. Zeige, dass alle in (1) definierten Metriken d_r, $0 < r < 1$, äquivalent sind.

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{A}$ ein Alphabet und Σ der dazugehörige Coderaum. Für jedes Wort der Länge n, $w = w_1 w_2 \ldots w_n$, $n \in \mathbb{N}$, $w_i \in \mathcal{A}$, definiert man den *Zylinder der Länge n* durch

$$C_{w_1 w_2 \ldots w_n} := \{w' \in \Sigma \,:\, w'_i = w_i,\ \forall\, i = 1, \ldots n\}.$$

Zeige, dass diese Mengen sowohl offen als auch abgeschlossen in (Σ, d_r) sind.

Aufgabe 4

Sei $\mathcal{A} := \{0, 1\}$ das Alphabet bestehend aus den Symbolen 0 und 1. Weiterhin sei $\Sigma = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ der zugehörige Coderaum. Beweise, dass Σ homöomorph zur Cantormenge ist.
(Hinweis: betrachte Σ mit der Metrik $d_{1/3}$.)