Universität Siegen, Département Mathematik
Dr. Uta Freiberg, Dr. Wilfried Huss

Abgabe in den Übungen: 27.04. - 29.04.2011

Sommersemester 2011

Stochastik II

2. Übungsblatt

Aufgabe 1 (3+2+1=6 Punkte)
Zeigen Sie die Aussagen (b), (c) und (d) des Lemmas 1.1.10.

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)
Es sei $\Omega = \{1, \dots, 4\}$. Geben Sie je zwei Beispiele (die sich nicht nur durch eine bloße Umnummerierung voneinander unterscheiden) folgender Mengensysteme über Ω an:

(i) ein Dynkin–System, das keine Algebra ist,

(ii) ein $\bigcap$–stabiles System, das keine Algebra ist.

Aufgabe 3 (2+2=4 Punkte)
Es sei $\mathcal{A}$ eine Algebra und μ ein Inhalt. Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ die sogenannten **Ein– und Ausschlussformeln**:

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\} \subseteq \{1,\ldots,n\}} \mu(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

und

$$\mu(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\} \subseteq \{1,\ldots,n\}} \mu(A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_k}).$$

Aufgabe 4 (2+2+2=6 Punkte)
Es sei Ω eine abzählbare Menge, versehen mit der σ–Algebra $\mathcal{A} := \mathfrak{P}(\Omega)$. Ferner bezeichne $\mathcal{M}^1$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}^1$ konvex ist.
Hinweis: Eine Menge M heißt *konvex*, falls für $x, y \in M$, $\lambda \in [0,1]$ auch die sogenannte *Konvexkombination* $\lambda x + (1-\lambda)y \in M$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Extremalpunkte von $\mathcal{M}^1$.
Hinweis: Eine Punkt x einer konvexen Menge M heißt *extremal*, falls er sich nicht als nichttriviale Konvexkombination gewisser $y, z \in M$ schreiben lässt. Ergo: $x \in M$ heißt *extremal*, falls aus $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ für gewisse $\lambda \in (0,1)$ und $y, z \in M$ bereits folgt, dass $x = y = z$.

(c) Zeigen Sie, dass sich jedes $\mathbb{P} \in \mathcal{M}^1$ als Konvexkombination (im Falle von W–Maßen spricht man auch von „Mischung“) von Extremalpunkten darstellen lässt, d.h. man zeige: Für jedes $\mathbb{P} \in \mathcal{M}^1$ existieren $(\mathbb{P}_i)_i$, wobei $\mathbb{P}_i \in \mathcal{M}^1$ extremal für alle i, so dass

$$\mathbb{P} = \sum_i \alpha_i \mathbb{P}_i$$

mit gewissen $\alpha_i \geq 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$.

Aufgabe 5* (+ 4* Punkte)
Es seien $\Omega_1, \Omega_2 \neq \emptyset$, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung und $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega_2)$ ein Mengensystem. Man zeige, dass

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})).$$