Universität Siegen, Département Mathematik
Dr. Uta Freiberg

Abgabe in den Übungen: 18.05. – 20.05.2011

Sommersemester 2011

Stochastik II

5. Übungsblatt

Aufgabe 0 (ohne Abgabe)
Beschäftigen Sie sich mit 1.5.2 (g, i, j) und 1.6.1 (a) der Vorlesung.

Aufgabe 1 (1+2+2=5 Punkte)
Sei $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ eine meßbare Abbildung und μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Man zeige:

(i) μ ist genau dann endlich, wenn $\mu \circ f^{-1}$ endlich ist.

(ii) Falls $\mu \circ f^{-1}$ σ–endlich ist, so auch μ.

(iii) Die Umkehrung von (ii) ist im Allgemeinen falsch.

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)
Es seien μ und ν Maße auf ein und demselben messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$, ferner sei $\varphi = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$. Man zeige:

(i) $\varphi > 0$ ν–fast überall.

(ii) Gilt $\nu \leq \mu$ (d.h. $\nu(A) \leq \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$), so ist $\varphi \leq 1$ ν–fast überall.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Bezeichne $\mathcal{B}_{[0,1]}$ die Spur–σ–Algebra der Borel–σ–Algebra auf $[0,1]$ und λ das Lebesgue–Maß auf $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]})$. Sei $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion mit $\int \psi \mathbf{1}_{[a,b]} \mathrm{d}\lambda = 0$ für alle $[a,b] \subseteq [0,1]$. Man zeige, dass dann folgt: $\psi = 0$ λ–fast überall. Trick: Geeignetes Dynkin–System betrachten.

Aufgabe 4 (3+3+1=7 Punkte)
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$C_n := \bigcup_{a_1,\ldots,a_n \in \{0,2\}} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k}, \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^n} \right]$$

und

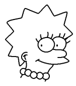
$$f_n(x) := (3/2)^n \int_0^x \mathbf{1}_{C_n}(t) \mathrm{d}\lambda(t), \qquad x \in [0,1].$$

Wir setzen $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$. C heißt *Cantor–Menge* oder *Cantor'sches Diskontinuum* und entsteht offenbar aus $[0,1]$ durch fortgesetztes Entfernen des mittleren offenen Drittels aller vorhandenen Teilintervalle.

bitte wenden →

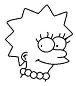
Man zeige:

(a) C ist eine kompakte, überabzählbare λ–Nullmenge.



Man benutze, dass die Mengen C_n eine absteigende Folge bilden.

(b) Die Folge der Funktionen (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen eine stetige, monoton wachsende Funktion $F : [0,1] \to [0,1]$ mit $F(0) = 0, F(1) = 1$ und $F'(x) = 0$ für alle $x \in [0,1] \setminus C$.



Es ist hierbei sicher hilfreich, sich die ersten 2–3 Funktionen dieser Folge zu skizzieren.

Man benutze außerdem, dass $(C[0,1], ||.||_\infty)$ vollständig ist: Falls man eine Konstante K findet, so dass $||f_n - f_{n+1}||_\infty \leq K2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, kann man folgern, dass $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge ist. Die Existenz von F folgt dann sofort. Die Funktion F heißt übrigens *Devil's Staircase*.

(c) Für die Funktion F gilt im Allgemeinen **nicht**

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\mathrm{d}\lambda(t), \qquad a, b \in [0,1].$$

Aufgabe 5* (+ 4* Punkte (=2+2))

Wir werfen eine Kopf–Zahl–Münze $n \geq 2$ mal. Es sei $p \in (0,1)$ die Wahrscheinlichkeit für **Zahl**. Wir betrachten folgende Ereignisse

A : Jeder der n Münzwürfe hat dasselbe Ergebnis.

B : Höchstens einmal erscheint **Kopf**.

Man bestimme für $p = 1/2$ alle $n \geq 2$, so dass A und B unabhängig sind.

Man zeige, dass für alle $n \geq 3$ ein $p \in (0,1)$ existiert, so dass A und B unabhängig sind.