Universität Siegen, Département Mathematik
Dr. Uta Freiberg

Abgabe in den Übungen: 06.07. – 08.07.2011

Sommersemester 2011

Stochastik II

11. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei $X \sim \text{Exp}_\lambda$ die Lebensdauer eines elektrischen Gerätes, wobei $\lambda > 0$ ein unbekannter Parameter sei. Bei Untersuchungen der Stiftung–Warentest© über die mittlere Lebensdauer werden einige der Geräte über eine Zeitspanne $[0, t]$ beobachtet. Für $t > 0$ sei $W_t := X \wedge t = \min(X, t)$ die tatsächlich beobachtete Laufzeit des Gerätes. Man zeige, dass

$$\mathbb{E}(X|W_t) = X\mathbf{1}_{\{X<t\}} + (t + 1/\lambda)\mathbf{1}_{\{X\geq t\}}$$

gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Zahlenfolge in $(0, \infty)$. Für jedes $n \geq 1$ sei $X_n \sim \text{Poiss}_{\lambda_n}$. Man zeige:

$$\mathbb{P}(X_n \geq n \text{ tritt nur für endlich viele } n \text{ ein}) = 1.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $p \in (0, 1), p \neq 1/2$. Wie in der Vorlesung definieren wir i.i.d. Zufallsgrößen $(X_n)_{n\geq 1}$ (jetzt abzählbar viele und nun) mit der Verteilung $\mathbb{P}(X_1 = +1) = p$, $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$. Wir definieren dann die *unsymmetrische Irrfahrt* $(S_n)_{n\geq 0}$ durch $S_0 := 0$ und $S_n := X_1 + \ldots X_n$. Man kann $(S_n)_{n\geq 0}$ also gut als seinen Kontostand in einem unfairen Spiel über mehrere Runden interpretieren.
Man zeige: Die Irrfahrt $(S_n)_{n\geq 0}$ kehrt mit Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich oft zum Ursprung zurück.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Man zeige: Für abzählbare W–Räume folgt aus stochastischer Konvergenz fast sichere Konvergenz.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine i.i.d. Folge mit $X_1 \sim \text{Poiss}_1$. Man zeige, dass fast sicher gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log\log n}{\log n} X_n = 1.$$

Aufgabe 6* (+ 4* Punkte)
Kann man aus

$$\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}X \qquad \mathbb{P}\text{–f.s.}$$

auf die Unabhängigkeit der Zufallsgrößen X und Y schließen?