Universität Siegen, Département für Mathematik
Dr. Uta Freiberg, Dr. Wilfried Huss

Abgabe in den Übungen: 13.04. - 15.04.2011

Sommersemester 2011

Stochastik II

1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4+3+1=8 Punkte)
Es sei $\Omega = \{1, \ldots, 4\}$. Geben Sie jeweils die von den folgenden Mengensystemen erzeugten σ–Algebren über Ω an:

(i) $\mathcal{C}_1 := \{\{1, 2\}\}$

(ii) $\mathcal{C}_2 := \{\{1\}, \{2\}\}$

(iii) $\mathcal{C}_3 := \{\{1\}, \{1, 2, 3\}\}$

(iv) $\mathcal{C}_4 := \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

Geben Sie drei Erzeugendensysteme für die triviale σ–Algebra $\mathfrak{P}(\Omega)$ an, die aus jeweils unterschiedlich vielen Elementen bestehen. Wieviele Elemente muss ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{P}(\Omega)$ mindestens besitzen?

Aufgabe 2 (3+4=7 Punkte)

(a) Sei $\Omega \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq \Omega : A \text{ abzählbar oder } A^C \text{ abzählbar}\}$$

eine σ–Algebra über Ω ist.

(b) Seien $\Omega, \Omega' \neq \emptyset$ und $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Ist $\mathcal{F}'$ eine σ–Algebra über Ω', so ist

$$\mathcal{F} := \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{F}'\}$$

eine σ–Algebra über Ω.

(ii) Ist $\mathcal{F}$ eine σ–Algebra über Ω, so ist

$$\mathcal{F}' := \{f(A) : A \in \mathcal{F}\}$$

eine σ–Algebra über Ω'.

Aufgabe 3 (3+2=5 Punkte)
Beweisen Sie die Aussagen der Bemerkung 1.1.7 über die Spur–σ–Algebra.

Aufgabe 4* (+ 4* Punkte)
Wir betrachten die Potenzmenge der natürlichen Zahlen $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ und definieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Mengensystem $\mathcal{C}_n := \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$. Sei $\mathcal{F}_n := \sigma(\mathcal{C}_n)$. Man zeige:

(a) $\mathcal{F}_n = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \subseteq \{1, \ldots, n\} \text{ oder } \{n + 1, n + 2, \ldots\} \subseteq A\}$.

(b) $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$.

Ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ eine σ–Algebra über $\mathbb{N}$?