

## Markovprozesse, Dirichletformen und Halbgruppen

### 4. Übungsblatt

#### Aufgabe 12

Zeigen Sie, daß es sich bei den in den Abschnitten 2.0.1 und 2.0.2 definierten Prozessen  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  jeweils um  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -Martingale handelt.

#### Aufgabe 13

Zeigen Sie, daß durch die folgenden linearen Operatoren  $T_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  jeweils Halbgruppen  $(T_t)_{t \geq 0}$  definiert werden:

$$(i) \quad T_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad (ii) \quad T_t = \begin{pmatrix} 3 - 2e^t & e^t - 1 \\ 6 - 6e^t & 3e^t - 2 \end{pmatrix} \quad (iii) \quad T_t = \begin{pmatrix} 1 + t & t \\ -t & 1 - t \end{pmatrix}.$$

Welche dieser Halbgruppen sind stark stetig, welche sind Kontraktions-Halbgruppen?

#### Aufgabe 14

Sei  $(T_t)_{t \geq 0}$  eine stark stetige Halbgruppe auf  $\mathbb{R}^n$ . Man zeige, daß dann für alle  $t \geq 0$  die Matrix  $T_t$  invertierbar ist.

#### Aufgabe 15

Man beweise Korollar 2.1.6 aus der Vorlesung.