Dr. U. Freiberg, Universität Siegen

Sommersemester 2011

Markovprozesse, Dirichletformen und Halbgruppen

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Man zeige:

(i) Es sei $u : B(x,r) \to \mathbb{R}$ harmonisch und durch M beschränkt. Dann sind die partiellen Ableitungen $k$ter Ordnung von u beschränkt durch ein konstantes Vielfaches von Mr^{-k}.

(ii) Jede positive harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^d$ ist konstant.

Aufgabe 2

Sei $d \geq 2$. Man zeige: $u : \overline{B(0,1)}^C \to \mathbb{R}$ ist genau dann harmonisch, wenn $u^* : B(0,1)\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$u^*(x) := u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)|x|^{2-d}$$

harmonisch ist.

Aufgabe 3

Es sei u eine radialsymmetrische harmonische Funktion auf der Kugelschale ($d = 2$ „Kreisring“)

$$A := \{x \in \mathbb{R}^d : r < |x| < R\},$$

wobei radialsymmetrisch bedeutet, daß $u(x) = \widetilde{u}(|x|)$ für eine Funktion $\widetilde{u} : (r,R) \to \mathbb{R}$ und alle $x \in A$. Sei weiterhin u auf $\bar{A}$ stetig. Man zeige:

(i) Falls $d \geq 3$, dann existieren Konstanten a und b, so daß $u(x) = a + b|x|^{2-d}$.

(ii) Falls $d = 2$, dann existieren Konstanten a und b, so daß $u(x) = a + b\log|x|$.

Aufgabe 4

Man zeige:

(i) Falls $u : U \to \mathbb{R}$ subharmonisch ist, dann gilt für jede Kugel $B(x,r) \subseteq U$

$$u(x) \leq \frac{1}{\mathcal{L}(B(x,r))}\int_{B(x,r)} u(y)dy. \tag{1}$$

(ii) Erfüllt umgekehrt eine zweimal differenzierbare Funktion u die Beziehung (1) für jede Kugel $B(x,r) \subseteq U$, dann ist u subharmonisch.

Man finde ein Beispiel für eine nicht stetige Funktion, die (1) für jede Kugel $B(x,r) \subseteq U$ erfüllt.