Wissenschaftliche Hausarbeit
zur Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an
Gymnasien

im Fach Mathematik

Über das Verhalten der Maximalfunktion in Abhängigkeit von der Dimension

vorgelegt von Peter Arzt
geb. am 5.7.1982 in Bernau

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die sogenannte *zentrierte Hardy-Littlewood Maximalfunktion* Mf einer lokal integrierbaren Funktion f ist definiert durch

$$(Mf)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{|y|\leq r} |f(x-y)| \, dy.$$

Den Operator M nennt man *Hardy-Littlewood Maximaloperator*.

Der Beschränktheit des Maximaloperators kommt z.B. bei der Untersuchung von Approximationsprozessen eine große Bedeutung zu. Auch in anderen Bereichen der Fourieranalysis sind Maximalungleichungen neben und besonders auch in Verbindung mit Fourier-Multiplikatoren ein wichtiges Werkzeug.

Mit einem Überdeckungsargument, das oft *Vitali covering lemma* genannt wird, kann man zeigen, dass M eine schwache $(1,1)$-Ungleichung erfüllt und somit den Raum $L_1(\mathbb{R}^n)$ in den Raum $w{-}L_1(\mathbb{R}^n)$ abbildet. Da M sublinear und auf $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ beschränkt ist, folgt mit dem Interpolationssatz von Marcinkiewicz die Beschränktheit auf $L_p(\mathbb{R}^n)$ für $1 < p < \infty$. Bei dieser Vorgehensweise, die z.B. in Grafakos [5] beschrieben wird, erhält man die Abschätzung

$$\|Mf|L_p(\mathbb{R}^n)\| \leq 2\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^{\frac{1}{p}} 3^{\frac{n}{p}} \|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|.$$

Die Konstante wächst also hier exponentiell mit der Dimension n.

In dieser Arbeit wird mit anderen Argumenten gezeigt, dass es eine obere Schranke für die Norm von M gibt, die von der Dimension unabhängig ist. Außerdem wird eine verallgemeinerte Maximalungleichung bewiesen, in der die Konstante dafür noch dimensionsabhängig ist, allerdings nur linear in n wächst. Entdeckt wurden diese Aussagen von Stein und Strömberg [10].

1 Vorbetrachtungen

1.1 Topologische Gruppen, Maße und Integrale

Definition 1.1.1. (i) Sei X eine nichtleere Menge und $\mathscr{T}$ eine System von Teilmengen von X. Dann nennt man $(X, \mathscr{T})$ (oder kurz X) einen *topologischen Raum*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

a) $\emptyset \in \mathscr{T}$

b) $X \in \mathscr{T}$

c) $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{T} \Rightarrow \bigcup \mathscr{A} \in \mathscr{T}$

d) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{T} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{T} \qquad (n \in \mathbb{N})$

(ii) $\mathscr{T}$ nennt man dann *Topologie* in X.

(iii) Die Mengen in $\mathscr{T}$ heißen *offene Mengen*.

(iv) Eine Menge $A \in \mathscr{T}$ heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus A$ offen ist.

(v) Für $x \in X$ nennt man eine offene Menge, die x enthält, *Umgebung* von x.

(vi) Ist $A \subseteq X$, so nennt man

a) $A^\circ := \bigcup\limits_{\substack{B \in \mathscr{T} \\ B \subseteq A}} B$ das *Innere* der Menge A und

b) $\bar{A} := \bigcap\limits_{\substack{B \text{ abgeschl.} \\ A \subseteq B}} B$ den *Abschluss* von A.

(vii) Ein Mengensystem $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$ heißt *Basis* der Topologie $\mathscr{T}$, wenn sich jede Menge aus $\mathscr{T}$ als Vereinigung beliebig vieler Mengen aus $\mathscr{B}$ darstellen lässt.

(viii) X heißt *kompakt*, wenn es für jede Familie $(A_i)_{i \in I}$ mit $A_i \in \mathscr{T}$ für alle i aus einer beliebigen Indexmenge I und $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = X$, eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ gibt, so dass $X = \bigcup\limits_{i \in J} A_i$ ist.

(ix) Sei $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{T}})$ ein weiterer topologischer Raum. Eine Abbildung $f\colon X \to \tilde{X}$ heißt *stetig*, wenn $f^{-1}(A) \in \mathscr{T}$ für alle $A \in \tilde{\mathscr{T}}$.

Lemma 1.1.1. *Sei X eine nichtleere Menge und $\mathscr{B}$ ein System von Teilmengen von X. Weiter sei $\mathscr{T}$ die Menge aller Teilmengen von X, welche sich sich als Vereinigung von Mengen aus $\mathscr{B}$ darstellen lassen. Es gilt: $\mathscr{T}$ ist genau dann eine Topologie in X, wenn*

(i) *es für $U, V \in \mathscr{B}$ und $x \in U \cap V$ ein $W \in \mathscr{B}$ gibt, so dass $x \in W \subseteq U \cap V$ und*

(ii) $X = \bigcup \mathscr{B}$.

Dies bedeutet, dass es zu jedem „geeigneten" Mengensystem $\mathscr{B}$ von Teilmengen von X eine Topologie $\mathscr{T}$ gibt, deren Basis $\mathscr{B}$ ist.

Beweis. Siehe Dunford und Schwartz [3, S. 11]. □

Definition 1.1.2. Seien $(X_1, \mathscr{T}_1)$ und $(X_2, \mathscr{T}_2)$ topologische Räume. Die *Produkttopologie* $\mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2$ ist die Topologie in $X_1 \times X_2$ mit der Basis $\{A_1 \times A_2\colon A_1 \in \mathscr{T}_1,\ A_2 \in \mathscr{T}_2\}$. Den Raum $(X_1 \times X_2, \mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2)$ nennt man den *Produktraum* von X_1 und X_2.

Definition 1.1.3. (i) Ein topologischer Raum $(X, \mathscr{T})$ heißt *Hausdorff-Raum*, wenn

- a) Mengen, die nur aus einem Punkt bestehen abgeschlossen sind und
- b) es für je zwei verschiedene Punkte x und y aus X disjunkte Umgebungen von x und y gibt.

(ii) Ist G eine nichtleere Menge und $\circ$ eine zweistellige Operation auf G, so nennt man $(G, \circ)$ *Gruppe*, wenn

- a) es ein $I \in G$ gibt, so dass $I \circ \tau = \tau \circ I = \tau$ für alle $\tau \in G$,
- b) es für jedes $\tau \in G$ ein $\tau^{-1} \in G$ gibt, so dass $\tau \circ \tau^{-1} = \tau^{-1} \circ \tau = I$ und
- c) $(\rho \circ \sigma) \circ \tau = \rho \circ (\sigma \circ \tau)$ für alle $\rho, \sigma, \tau \in G$ gilt.

Für $\tau \in G$ und $A \subseteq G$ definieren wir $\tau \circ A := \{\tau \circ \sigma\colon \sigma \in A\}$ (und analog $A \circ \tau$).

(iii) Eine Gruppe G heißt *topologische Gruppe*, wenn

- a) G ein Hausdorff-Raum ist und
- b) die Abbildung $f\colon G \times G \to G$ mit $f(\sigma, \tau) = \sigma \circ \tau^{-1}$ stetig ist.

(iv) Eine topologische Gruppe heißt *kompakte Gruppe*, wenn sie kompakt ist.

Definition 1.1.4. (i) Sei X eine nichtleere Menge. Man nennt das Mengensystem $\mathscr{A}$ von Teilmengen von X *σ-Algebra*, wenn die drei Bedingungen

a) $X \in \mathscr{A}$

b) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathscr{A}$

c) $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$

gelten.

Dann nennt man $(X, \mathscr{A})$ *messbarer Raum.*

(ii) Ist $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum, so nennt man die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra $\mathscr{B} := \bigcap\limits_{\substack{\mathscr{A}\,\sigma-\text{Algebra}\\ \mathscr{T}\subseteq\mathscr{A}}} \mathscr{A}$ die *σ-Algebra der Borelmengen von X* und die Elemente von $\mathscr{B}$ *Borelmengen.*

Die Borelmengen des $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\mathscr{B}^n$.

(iii) Für einen messbaren Raum $(X, \mathscr{A})$ heißt eine Mengenfunktion $\mu \colon \mathscr{A} \to [0, \infty]$ *Maß*, falls sie die Eigenschaften

a) $\mu(\emptyset) = 0$

b) $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A} \Rightarrow \mu\big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

hat. Ist $\mathscr{A} = \mathscr{B}$ die σ-Algebra der Borelmengen, nennt man μ *Borelmaß.*

Das Tripel $(X, \mathscr{A}, \mu)$ heißt *Maßraum.* Ist $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{A}}, \tilde{\mu})$ ein weiterer Maßraum, so bezeichnet $\mu \times \tilde{\mu}$ das *Produktmaß* auf $(X \times \tilde{X}, \mathscr{A} \otimes \tilde{\mathscr{A}})$. Eine genauere Definition ist in Folland [4] ab Seite 64 gegeben.

(iv) Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das Maß μ heißt *vollständig*, wenn für jedes $N \in \mathscr{A}$ mit $\mu(N) = 0$ gilt, dass alle $M \subseteq N$ in $\mathscr{A}$ liegen.

Satz 1.1.1. *Für einen Maßraum $(X, \mathscr{A}, \mu)$ sei $\mathscr{N} := \{N \colon \mu(N) = 0\}$ und $\bar{\mathscr{A}} := \{A \cup M \colon A \in \mathscr{A},\ M \subseteq N,\ N \in \mathscr{N}\}$. Dann ist $\bar{\mathscr{A}}$ eine σ-Algebra und μ lässt sich in eindeutiger Weise zu einem vollständigen Maß $\bar{\mu}$ auf $\bar{\mathscr{A}}$ fortsetzen. $\bar{\mathscr{A}}$ heißt* Vervollständigung *von $\mathscr{A}$ und $\bar{\mu}$ heißt* Vervollständigung *von μ.*

Beweis. Der Satz wird in Folland [4] bewiesen. □

Definition 1.1.5. (i) Sei X ein topologischer Raum und seien $\mathscr{A}$ und μ so, dass $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum ist. Dann nennt man μ *reguläres Maß*, wenn es für jedes

$E \in \mathscr{A}$ und $\varepsilon > 0$ ein $F \in \mathscr{A}$ mit $\bar{F} \subseteq E$ und ein $G \in \mathscr{A}$ mit $E \subseteq G^\circ$ gibt, so dass $\mu(C) < \varepsilon$ für alle $C \in \mathscr{A}$ mit $C \subseteq G \setminus F$.

(ii) Sei G eine kompakte Gruppe und $\mathscr{B}$ die σ-Algebra der Borelmengen von G. Ein reguläres Maß auf $(G, \mathscr{B})$ heißt *Haar-Maß*, wenn $\mu(\tau \circ A) = \mu(A) = \mu(A \circ \tau)$ für alle $\tau \in G$ und $A \in \mathscr{B}$.

Satz 1.1.2. *Sei $(G, \circ)$ eine kompakte Gruppe und $\mathscr{B}$ die σ-Algebra der Borelmengen. Dann gibt es ein Haar-Maß auf $(G, \mathscr{B})$. Sind μ_1 und μ_2 Haar-Maße, so gibt es ein $c > 0$, so dass $\mu_1 = c\mu_2$.*

Beweis. Ein Beweis ist bei Folland [4, S. 344] zu finden. □

Definition 1.1.6. Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir bezeichnen das *(Lebesgue-)Integral* einer auf X definierten Funktion f über X bezüglich μ mit $\int_X f \, d\mu = \int_X f(x) \, d\mu(x)$. Eine genaue Definition des Lebesgue-Integrals findet man z.B. in Folland [4].

Beispiel 1.1.1. Das *Lebesgue-Maß* wird z.B. in Folland [4] eingeführt. Wir bezeichnen die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen mit $\mathscr{L}$ und das Lebesgue-Maß einer Menge $A \in \mathscr{L}$ mit $|A|$. Im Folgenden wird, wenn es um den $\mathbb{R}^n$ geht und nichts anderes gesagt wird, immer die σ-Algebra $\mathscr{L}$ und das Lebesguemaß $|\cdot|$ verwendet.

Das Integral einer messbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ bezüglich des Lebesgue-Maßes bezeichnen wir mit $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx$.

Satz 1.1.3. (Satz von Fubini)
Es sei $f\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{C}$ messbar und es existiere eines der Integrale

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x,y)| \, d(x,y) \\ I_2 &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{R^n} |f(x,y)| \, dx \right) dy \\ I_3 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{R^m} |f(x,y)| \, dy \right) dx. \end{aligned}$$

Dann existieren auch die jeweils anderen Integrale und sie stimmen alle überein. Außerdem ist

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y) \, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{R^n} f(x,y) \, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{R^m} f(x,y) \, dy \right) dx.$$

Die Formulierung dieses Satzes ist übernommen aus Schmeißer [8].

Beispiel 1.1.2. Mit $SO(n)$ bezeichnet man die Menge der Rotationen im $\mathbb{R}^n$ um den Koordinatenursprung. Die Elemente von $SO(n)$ sind also Abbildungen $\tau\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die die Darstellung $\tau(x) = Tx$ haben, wobei $x \in \mathbb{R}^n$ und T eine orthogonale $(n \times n)$-Matrix mit Determinante 1 ist.

$(SO(n), \circ)$ ist eine kompakte Gruppe, wobei $\circ$ die Hintereinanderausführung von Funktionen bezeichnet. Nach Satz 1.1.2 gibt es ein Haar-Maß μ auf $SO(n)$. Man bezeichnet nun das Maß $\mu_H = \frac{1}{\mu\big(SO(n)\big)}\mu$ als *normiertes Haar-Maß auf* $SO(n)$. Dieses ist eindeutig bestimmt. Betrachtet man das Lebesgue-Integral bezüglich μ_H, so ergibt sich für auf $SO(n)$ definierte Funktionen f und $\sigma \in SO(n)$

$$\int_{SO(n)} f(\sigma \circ \tau)\, d\mu_H(\tau) = \int_{SO(n)} f(\tau)\, d\mu_H(\tau).$$

Die folgenden Betrachtungen über die Integration auf der Einheitssphäre S^{n-1} im $\mathbb{R}^n$ sind aus Folland [4] entnommen. Auch die hier weggelassenen Beweise sind dort ab Seite 77 zu finden.

Wir konstruieren jetzt ein rotationsinvariantes Maß auf der Einheitssphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| = 1\}$. Dazu benutzen wir die Bezeichnungen $r = |x|$ und $x' = \frac{x}{|x|}$. Die Abbildung $\Phi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to (0,\infty) \times S^{n-1}$ mit $\Phi(x) = (r, x')$ ist bijektiv und stetig mit dem Inversen $\Phi^{-1}(r, x') = rx'$. Sei μ das Bildmaß des Lebesgue-Maßes bezüglich Φ, definiert durch $\mu(A) = |\Phi^{-1}(A)|$ für $A \in \mathscr{B}^n$. μ ist also ein Maß auf $(0,\infty) \times S^{n-1}$. Nun definieren wir ein Maß $\rho = \rho_n$ auf $(0,\infty)$ durch $\rho(A) = \int_A r^{n-1}\, dr$.

Satz 1.1.4. *Es gibt ein eindeutig bestimmtes Borel-Maß* $\mu_{S^{n-1}}$ *auf* S^{n-1}*, so dass* $\mu = \rho \times \mu_{S^{n-1}}$*. Für Borel-messbare integrierbare Funktionen* f *gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(tx')t^{n-1}\, d\mu_{S^{n-1}}(x')\, dt. \tag{1.1.1}$$

Definition 1.1.7. Vervollständigt man die Borelmengen der Einheitskugel, so erhält man nach Satz 1.1.1 eine σ-Algebra, die wir mit $\mathscr{L}_{S^{n-1}}$ bezeichnen und deren Elemente die *Lebesgue-messbaren Mengen auf der Einheitskugel* genannt werden. Die (eindeutig bestimmte) Fortsetzung von $\mu_{S^{n-1}}$ auf $\mathscr{L}_{S^{n-1}}$ heißt *Lebesgue-Maß auf der Einheitssphäre* und wird ebenfalls mit $\mu_{S^{n-1}}$ bezeichnet.

Bemerkung. Die Gleichung (1.1.1) gilt dann auch für Lebesgue-messbare Funktionen auf der Einheitskugel.

Bemerkung. $\mu_{S^{n-1}}$ ist rotationsinvariant, das heißt für $\tau \in SO(n)$ und $A \in \mathscr{L}_{S^{n-1}}$

gilt $\mu_{S^{n-1}}\big(\tau(A)\big) = \mu_{S^{n-1}}(A)$. Dies hat zur Folge, dass für messbare $f\colon S^{n-1} \to \mathbb{C}$

$$\int_{S^{n-1}} f\big(\tau(x)\big)\, d\mu_{S^{n-1}}(x) = \int_{S^{n-1}} f(x)\, d\mu_{S^{n-1}}(x)$$

gilt.

Jedoch ist ein Maß auf S^{n-1} durch die Rotationsinvarianz allein nicht eindeutig bestimmt. Genauer gilt für zwei rotationsinvariante Maße μ und ν auf S^{n-1} nämlich $\mu = c\nu$ für ein $c > 0$.

1.2 Die Räume $L_p(\mathbb{R}^n)$ und $w - L_p(\mathbb{R}^n)$

Wir definieren das *wesentliche Supremum*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| := \inf\{ \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus N} |f(x)| \colon N \subseteq \mathbb{R}^n, |N| = 0\}$$

für messbare Funktionen f auf $\mathbb{R}^n$. Wir werden oft auch einfach sup schreiben, wenn aus dem Kontext klar ist, dass das wesentliche Supremum genommen werden muss.

Definition 1.2.1. Es sei $1 \leq p < \infty$. Dann definieren wir für messbare Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

(i) $\|f|L_p(\mathbb{R}^n)\| := \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}}$,

(ii) $\|f|w - L_p(\mathbb{R}^n)\| := \sup_{t>0} t|\{x \in \mathbb{R}^n \colon |f(x)| > t\}|^{\frac{1}{p}}$,

(iii) $\|f|L_\infty(\mathbb{R}^n)\| := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$.

(iv) $L_p(\mathbb{R}^n) := \{f \colon f$ messbar und $\|f|L_p(\mathbb{R}^n)\| < \infty\}$,

(v) $w - L_p(\mathbb{R}^n) := \{f \colon f$ messbar und $\|f|w - L_p(\mathbb{R}^n)\| < \infty\}$,

(vi) $w - L_\infty(\mathbb{R}^n) := L_\infty(\mathbb{R}^n) := \{f \colon f$ messbar und $\|f|L_\infty(\mathbb{R}^n)\| < \infty\}$.

Dabei betrachten wir zwei Funktionen als gleich, wenn sie fast überall übereinstimmen.

Satz 1.2.1. *Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, bzw. $p' = \infty$ falls $p = 1$. Dann gilt für alle $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$ die Hölder'sche Ungleichung*

$$\|fg|L_1(\mathbb{R}^n)\| \leq \|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|\|g|L_{p'}(\mathbb{R}^n)\|.$$

Außerdem gilt für alle $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ die Minkowski'sche Ungleichung

$$\|f+g|L_p(\mathbb{R}^n)\| \leq \|f|L_p(\mathbb{R}^n)\| + \|g|L_p(\mathbb{R}^n)\|.$$

Definition 1.2.2. Es seien $1 \leq p, q \leq \infty$. Ein Operator $T\colon L_p(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ heißt

(i) *schwach* (p,q), falls es ein $c > 0$ gibt, so dass für alle $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$

$$\|Tf|w-L_q(\mathbb{R}^n)\| \leq c\|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|$$

gilt und

(ii) *stark* (p,q), falls es ein $c > 0$ gibt, so dass für alle $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$

$$\|Tf|L_q(\mathbb{R}^n)\| \leq c\|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|$$

gilt.

1.3 Der Interpolationssatz von Marcinkiewicz

Definition 1.3.1. Sei $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller Lebesgue-messbaren, komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Ein Operator $T\colon \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ heißt *sublinear*, wenn

$$|T(f_0+f_1)(x)| \leq |Tf_0(x)| + |Tf_1(x)|$$

für alle $f_0, f_1 \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ und

$$|T(\lambda f)(x)| = |\lambda||Tf(x)|$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Satz 1.3.1. *Es sei $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq \infty$ und es sei $T\colon L_{p_0}(\mathbb{R}^n) + L_{p_1}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ sublinear. Erfüllt T die Ungleichungen*

$$\|Tf|w-L_{p_0}(\mathbb{R}^n)\| \leq A_0\|f|L_{p_0}(\mathbb{R}^n)\|$$

für alle $f \in L_{p_0}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|Tf|w-L_{p_1}(\mathbb{R}^n)\| \leq A_1\|f|L_{p_1}(\mathbb{R}^n)\|$$

für alle $f \in L_{p_1}(\mathbb{R}^n)$*, dann ist* T *stark* (p,p)*, und es gilt*

$$\|Tf|L_p(\mathbb{R}^n)\| \leq 2\Big(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p_1-p}\Big)^{\frac{1}{p}} A_0^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}} A_1^{\frac{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}} \|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|.$$

Einen Beweis findet man in Grafakos [5, S. 32].

1.4 Der Hardy-Littlewood Maximaloperator und ein „Maximalfaltungsoperator“

Wir bezeichnen mit $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller messbaren Funktionen, für die

$$\int_K |f(x)|\,dx$$

für alle kompakten Mengen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ endlich ist. Mit $B(x,r)$ wird die offene Kugel um $x \in \mathbb{R}^n$ mit dem Radius $r > 0$ bezeichnet.

Definition 1.4.1. Sei $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Dann nennt man die Funktion

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{|y|\leq r} |f(x-y)|\,dy$$

zentrierte Hardy-Littlewood Maximalfunktion von f. Der Operator M heißt *Hardy-Littlewood Maximaloperator.*

Bemerkung. M ist sublinear und es gilt $\|Mf|L_\infty(\mathbb{R}^n)\| \leq \|f|L_\infty(\mathbb{R}^n)\|$.

Satz 1.4.1. *Es gilt*

(i) $|\{x \in \mathbb{R}^n\colon (Mf)(x) \geq \alpha\}| \leq 3^n \alpha^{-1} \|f|L_1(\mathbb{R}^n)\|$ *für alle* $\alpha > 0$ *und* $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$

(ii) $\|Mf|L_p(\mathbb{R}^n)\| \leq 2\big(\frac{p}{p-1}\big)^{\frac{1}{p}} 3^{\frac{n}{p}} \|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|$ *für* $1 < p < \infty$ *und* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Einen Beweis kann man in Grafakos [5, S. 80] nachlesen. □

Definition 1.4.2. Es seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ messbar und es existiere $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$$

Faltung von f und g.

Satz 1.4.2. *Sei* $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ *stetig, integrierbar, und es gelte* $\Phi(x) \geq \Phi(y)$ *falls* $|x| \leq |y|$. *Außerdem sei* $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *eine messbare Funktion mit* $|\phi| \leq \Phi$. *Wir nennen* Φ *dann* radial fallende, integrierbare Majorante *von* ϕ, *und es gilt für alle* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *(*$1 \leq p < \infty$*)*

$$\sup_{t>0} |(f * \phi_t)(x)| \leq \|\Phi|L_1(\mathbb{R}^n)\|(Mf)(x)$$

wobei $\phi_t = \frac{1}{t^n}\phi\left(\frac{\cdot}{t}\right)$.

Dieser Satz findet sich als Corollary 2.1.12. in Grafakos [5, S. 84].

1.5 Die Fouriertransformation

Die Definitionen und Sätze in diesem Abschnitt sind entnommen aus Grafakos [5, S. 94–105].

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Die m-te partielle Ableitung von f nach der j-ten Variable bezeichnen wir mit $D_j^m f$. Für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ bezeichnen wir mit $D^\alpha f$ die Ableitung $D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} f$ der Ordnung $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

$C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sei die Menge aller komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, die beliebig oft stetig differenzierbar sind, d.h. alle Ableitungen $D^\alpha f$ existieren und sind stetig auf $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.5.1. Eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ nennt man *Schwartzfunktion*, wenn für alle Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty.$$

Die Menge aller Schwartzfunktionen nennen wir $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Für $j \in \mathbb{N}$ seien $f_j, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann konvergiert die Folge $(f_j)_j$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gegen f, wenn für alle Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:

$$\rho_{\alpha,\beta}(f - f_j) \to 0 \text{ für } j \to \infty.$$

Lemma 1.5.1. *Eine Funktion* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *ist genau dann in* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *wenn es für alle* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *und alle* $N \in \mathbb{N}$ *eine Konstante* $C_{\alpha,N} > 0$ *gibt, so dass*

$$|D^\alpha f(x)| \leq \frac{C_{\alpha,N}}{(1 + |x|)^N}.$$

Lemma 1.5.2. *Für $1 \le p < \infty$ liegt $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L_p(\mathbb{R}^n)$.*

Definition 1.5.2. Für $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ heißt Ff mit

$$(Ff)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

die *Fouriertransformierte von* f. Dabei ist $\langle x, \xi \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$ für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Satz 1.5.1. *F ist eine lineare stetige Bijektion von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Die Inverse Abbildung F^{-1} ist gegeben durch*

$$(F^{-1} f)(x) = (Ff)(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Satz 1.5.2. (Satz von Plancherel)
Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Ff)(\xi) \overline{(Fg)(\xi)} \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

und damit

$$\| Ff | L_2(\mathbb{R}^n) \| = \| f | L_2(\mathbb{R}^n) \|.$$

Wegen dieses Satzes, und weil $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L_2(\mathbb{R}^n)$ liegt, können wir F stetig fortsetzen auf $L_2(\mathbb{R}^n)$. Man kann auch zeigen, dass dann $F \colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ bijektiv ist. Der Satz gilt dann auch für $f, g \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Nun können wir F auch auf $L_p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 < p < 2$ definieren.

Definition 1.5.3. Sei $1 < p < 2$ und $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Dann setzen wir

$$Ff := Ff_1 + Ff_2,$$

wobei $f = f_1 + f_2$ mit $f_1 \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und $f_2 \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Die Definition ist unabhängig von der Wahl von f_1 und f_2.

Satz 1.5.3. *Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gelten die folgenden Aussagen.*

(i) $F\big(f(\cdot - y)\big)(\xi) = e^{-2\pi i \langle y, \xi \rangle} (Ff)(\xi)$

(ii) $F\big(f(t \cdot)\big) = \frac{1}{t^n} Ff(\frac{\cdot}{t})$ *für* $t > 0$

(iii) $F(D^\alpha f)(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha Ff(\xi)$ *für* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

(iv) $F(f * g) = (Ff)(Fg)$

2 Verhalten der Maximalfunktion in Abhängigkeit von der Dimension

2.1 Eine dimensionsabhängige Maximalungleichung

In diesem Abschnitt betrachten wir einen Maximaloperator, der anstatt mit Kugeln mit allgemeineren Mengen arbeitet. Diese Verallgemeinerung ist möglich, da für den Beweis nicht unbedingt erforderlich ist, dass das Integrationsgebiet eine Kugel ist.

Wir schreiben $xA := \{xa\colon a \in A\}$ für die Multiplikation eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ mit einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition 2.1.1. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und radial, d.h. es lässt sich schreiben als $B = \{t\theta\colon 0 \leq t < \rho(\theta),\, \theta \in S^{n-1}\}$, wobei $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| = 1\}$ die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ und $\rho\colon S^{n-1} \to (0,\infty)$ eine beschränkte Funktion ist. Für $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ nennt man

$$\big(M_B f\big)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|rB|} \int_{rB} |f(x-y)|\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

die *Hardy-Littlewood Maximalfunktion* von f.

Bemerkung. Die Menge B kann zum Beispiel eine Kugel oder ein Würfel sein. Im Fall von Würfeln wird also das Supremum über alle Würfel mit einer festen Orientierung gebildet. Im Unterschied hierzu wird in Kapitel 3 auch eine Maximalfunktion betrachtet, bei der das Supremum über alle beliebig verdrehten Würfel mit x im Mittelpunkt gebildet wird.

Für den Beweis des folgenden Satzes benötigt man eine Abschätzung der L_p-Norm der eindimensionalen *linksseitigen Maximalfunktion* von $f \in L_p(\mathbb{R})$, gegeben durch

$$(M_L f)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{r} \int_{x-r}^{x} |f(t)|\, dt.$$

Diese wird in den folgenden beiden Lemmas besprochen, die manchmal *Riesz's Rising*

Sun Lemma [7] genannt werden. Eine Übersetzung von Riesz' Argumentation ins Englische findet man bei Hardy, Littlewood und Pólya [6, S. 291-295].

Lemma 2.1.1. *Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten die Menge*

$$E = \{x \in \mathbb{R}\colon \ \textit{Es gibt ein } y < x \textit{ mit } g(y) < g(x)\}.$$

Dann existieren höchstens abzählbar viele paarweise disjunkte Intervalle (a_i, b_i) so dass $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ ist. Falls $a_i > -\infty$ und $b_i < \infty$, so gilt

$$g(a_i) = g(b_i).$$

Beweis. Da g stetig ist, ist E offen. Dann muss E eine höchstens abzählbare Vereinigung disjunkter offener Intervalle (a_i, b_i) sein.

Wir müssen nur Funktionen g betrachten, bei denen wir ein $i \in \mathbb{N}$ auswählen können, so dass (a_i, b_i) beschränkt ist. Ein solches i halten wir fest und betrachten $l := \inf_{x \le b_i - \varepsilon} g(x)$ für ein $\varepsilon > 0$ mit $a_i < b_i - \varepsilon$. Da ein x mit $a_i < x \le b_i - \varepsilon$ in E liegt, ist $l < g(x)$ auf $(a_i, b_i - \varepsilon]$. Für $x < a_i$ gilt, da $a_i \notin E$, dass $g(x) \ge g(a_i)$. Daraus folgt, dass das Infimum bei a_i angenommen wird und somit $g(a_i) \le g(b_i)$. Weil $b_i \notin E$, gilt aber auch $g(a_i) \ge g(b_i)$. □

Lemma 2.1.2. *Es gilt für alle $\alpha > 0$*

(i) $|\{x \in \mathbb{R}\colon M_L f(x) > \alpha\}| = \dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\int_{M_L f > \alpha} |f(t)|\, dt,$

(ii) $\|M_L f | L_p(\mathbb{R})\| \le \dfrac{p}{p-1} \|f | L_p(\mathbb{R})\|, \quad 1 < p < \infty.$

Beweis. (i) Sei $E := \{x \in \mathbb{R}\colon M_L f(x) > \alpha\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} M_L f(x) > \alpha &\Leftrightarrow \exists\, r > 0\colon \frac{1}{r} \int_{x-r}^{x} |f(t)|\, dt > \alpha \\ &\Leftrightarrow \exists\, r > 0\colon \int_0^x |f(t)|\, dt > \alpha r + \int_0^{x-r} |f(t)|\, dt \\ &\Leftrightarrow \exists\, r > 0\colon \int_0^x |f(t)|\, dt - x\alpha > \int_0^{x-r} |f(t)|\, dt - (x-r)\alpha \\ &\Leftrightarrow \exists\, r > 0\colon g(x) > g(x-r) \end{aligned}$$

mit $g(x) := \int_0^x |f(t)|\, dt - x\alpha$. Da g stetig ist, können wir nun Lemma 2.1.1 anwenden und erhalten $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$. Wir müssen nur den Fall untersuchen, in dem das Maß von E endlich ist, weswegen auch alle a_i und b_i endlich sind, und es gilt $g(a_i) = g(b_i)$ für alle $i \in \mathbb{R}$. Setzt man nun die Definition von g ein, lässt sich diese Gleichung umschreiben als:

$$\begin{aligned} g(a_i) = g(b_i) \Leftrightarrow \int_0^{a_i} |f(t)|\, dt - a_i\alpha &= \int_0^{b_i} |f(t)|\, dt - b_i\alpha \\ \Leftrightarrow \alpha(b_i - a_i) &= \int_{a_i}^{b_i} |f(t)|\, dt. \end{aligned}$$

Nun folgt

$$\begin{aligned} |E| = \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) &= \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{a_i}^{b_i} |f(t)|\, dt \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_E |f(t)|\, dt. \end{aligned}$$

(ii) folgt aus (i) durch Interpolation mit Satz 1.3.1. □

Satz 2.1.1. *Für* $1 < p < \infty$ *und* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$\|M_B f | L_p(\mathbb{R}^n)\| \leq n \frac{p}{p-1} \|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|.$$

Beweis. Für $\theta \in S^{n-1}$ und $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ nennen wir $M^\theta f$, gegeben durch

$$(M^\theta f)(x) := \sup_{r>0} \frac{\int_0^r |f(x - t\theta)| t^{n-1}\, dt}{\int_0^r t^{n-1}\, dt}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

die *Maximalfunktion in Richtung* θ.

Wir gehen zu Polarkoordinaten über (siehe Satz 1.1.4) und erhalten für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \int_{rB} |f(x-y)|\, dy &= \int_{S^{n-1}} \int_0^{r\rho(\theta)} |f(x - t\theta)| t^{n-1}\, dt\, d\mu_{S^{n-1}}(\theta) \\ &= \int_{S^{n-1}} \frac{\int_0^{r\rho(\theta)} |f(x - t\theta)| t^{n-1}\, dt}{\int_0^{r\rho(\theta)} t^{n-1}\, dt} \left(\int_0^{r\rho(\theta)} t^{n-1}\, dt \right) d\mu_{S^{n-1}}(\theta) \\ &\leq r^n \int_{S^{n-1}} \left(M^\theta f(x) \int_0^{\rho(\theta)} t^{n-1}\, dt \right) d\mu_{S^{n-1}}(\theta). \end{aligned}$$

Dabei ist $\mu_{S^{n-1}}$ das sphärische Lebesguemaß aus Definition 1.1.7.

Daraus folgt

$$M_B f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n |B|} \int_{rB} |f(x-y)|\, dy \le \frac{1}{|B|} \int_{S^{n-1}} \Big(M^\theta f(x) \int_0^{\rho(\theta)} t^{n-1}\, dt \Big)\, d\mu_{S^{n-1}}(\theta). \tag{2.1.1}$$

Aus der Abschätzung

$$\sup_{r>0} \frac{\int_0^r |f(x-t)| t^{n-1}\, dt}{\int_0^r t^{n-1}\, dt} = n \sup_{r>0} \frac{1}{r} \int_0^r |f(x-t)| \frac{t^{n-1}}{r^{n-1}}\, dt \le n M_L f(x)$$

und Lemma 2.1.1 (ii) gewinnt man

$$\|M^\theta f | L_p(\mathbb{R}^n)\| \le n \frac{p}{p-1} \|f | L_p(\mathbb{R}^n)\|. \tag{2.1.2}$$

Mit den Ungleichungen (2.1.1) und (2.1.2) folgt

$$\begin{aligned} \|M_B f | L_p(\mathbb{R}^n)\| &\le n \frac{p}{p-1} \|f | L_p(\mathbb{R}^n)\| \cdot \frac{1}{|B|} \int_{S^{n-1}} \int_0^{\rho(\theta)} t^{n-1}\, dt\, d\mu_{S^{n-1}}(\theta) \\ &= n \frac{p}{p-1} \|f | L_p(\mathbb{R}^n)\|. \end{aligned}$$

□

2.2 Die sphärische Maximalfunktion

In diesem Abschnitt wollen wir die L_p-Beschränktheit des nachfolgend definierten sphärischen Maximaloperators beweisen. Diese wurde erstmals 1976 von Stein [9] bewiesen. Die folgende Beweisführung ist Grafakos [5, S. 390–395] entnommen und stammt von J.-L. Rubio de Francia [2].

Definition 2.2.1. Es sei $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Wir nennen

$$(\mathscr{M}^n f)(x) := \sup_{t>0} \frac{1}{\omega_{n-1}} \left| \int_{S^{n-1}} f(x - t\theta)\, d\mu_{S^{n-1}}(\theta) \right|$$

sphärische Maximalfunktion. Dabei bezeichnet $\mu_{S^{n-1}}$ das Lebesguemaß auf S^{n-1} (siehe Definition 1.1.7) und $\omega_{n-1} = \mu_{S^{n-1}}(S^{n-1})$.

Definition 2.2.2. Sei $\mu_{S^{n-1}}$ das Lebesguemaß auf der Einheitssphäre S^{n-1}. Die *Fou-*

riertransformation des Maßes $\mu_{S^{n-1}}$ ist definiert durch

$$(F\mu_{S^{n-1}})(\xi) := \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i\langle \xi,\theta\rangle}\, d\mu_{S^{n-1}}(\theta).$$

Lemma 2.2.1. *Es gibt eine Konstante* C_n*, so dass*

$$|(F\mu_{S^{n-1}})(\xi)| \leq \frac{C_n}{(1+|\xi|)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Beweis. Der Beweis arbeitet mit der *Besselfunktion* J_k, die z.B. bei Grafakos [5, S. A-6] definiert wird und soll hier nicht im Detail vorgeführt werden. Man benutzt

$$(F\mu_{S^{n-1}})(\xi) = \frac{2\pi}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi|\xi|)$$

und das asymptotische Verhalten von $J_k(\xi)$ für $\xi \to 0$ und $\xi \to \infty$. Die Beweise findet man bei Grafakos [5, S. A-9–A-12]. □

Lemma 2.2.2. (Aufgabe 5.5.2 in Grafakos [5, S. 396])
Sei $m \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\|m|L_\infty(\mathbb{R}^n)\| = A$ *und* $\operatorname{supp} m \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n \colon R \leq |\xi| \leq 2R\}$ *für ein* $R > 0$*. Wir definieren*

$$(Gf)(x) := \left(\int_0^\infty \left|F^{-1}\big(m(t\cdot)Ff\big)(x)\right|^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

für $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$*. Dann gilt*

$$\|Gf|L_2(\mathbb{R}^n)\| \leq A\sqrt{\log 2}\,\|f|L_2(\mathbb{R}^n)\|.$$

Bemerkung. Da die Fouriertransformation $L_2(\mathbb{R}^n)$ bijektiv auf sich selbst abbildet und m kompakten Träger hat, ist G für alle $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ korrekt definiert.

Beweis. Unter Verwendung des Satzes von Plancherel (Satz 1.5.2), des Satzes von

Fubini (Satz 1.1.3) und der gegebenen Eigenschaften von m erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\|Gf|L_2(\mathbb{R}^n)\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \big| F^{-1}\big(m(t\cdot)Ff\big)(x)\big|^2 \frac{dt}{t} \right) dx \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |m(t\xi)Ff(\xi)|^2 \, d\xi \, \frac{dt}{t} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{R/|\xi|}^{2R/|\xi|} |m(t\xi)Ff(\xi)|^2 \, \frac{dt}{t} \, d\xi \\
&\le A^2 \left(\int_{R/|\xi|}^{2R/|\xi|} \frac{dt}{t} \right) \|f|L_2(\mathbb{R}^n)\|^2 \\
&\le A^2 \log 2 \|f|L_2(\mathbb{R}^n)\|^2.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. □

Wir definieren $\mathscr{M} f := \omega_{n-1}(\mathscr{M}^n f)$, da die Multiplikation mit einer Konstanten bei unseren Betrachtungen keine Rolle spielt. Den Operator $\mathscr{M}$ formulieren wir nun für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ um zu

$$(\mathscr{M} f)(x) = \sup_{t>0} |F^{-1}\big(m(t\cdot)Ff\big)(x)|$$

mit $m(\xi) = (F\mu_{S^{n-1}})(\xi)$.

Um diese Gleichheit zu beweisen, benutzen wir die Eigenschaft (i) aus Satz 1.5.3:

$$\begin{aligned}
F^{-1}\big(F\mu_{S^{n-1}}(t\,\cdot)Ff\big)(x) &= \int_{S^{n-1}} F^{-1}\big(e^{-2\pi i \langle t\cdot,\theta\rangle} Ff\big)(x) \, d\mu_{S^{n-1}}(\theta) \\
&= \int_{S^{n-1}} f(x - t\theta) \, d\mu_{S^{n-1}}(\theta).
\end{aligned}$$

Definition 2.2.3. Sei $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi_0(\xi) = 1$ für $|\xi| \le 1$ und $\varphi_0(\xi) = 0$ für $|\xi| \ge 2$. Die Folge $(\varphi_j)_{j=0}^\infty$ mit $\varphi_j(\xi) = \varphi_0(2^{-j}\xi) - \varphi_0(2^{1-j}\xi)$ für $j \ge 1$ nennt man *dyadische Zerlegung der Eins.*

Für die folgende Argumentation fixieren wir eine dyadische Zerlegung der Eins und nennen sie $(\varphi_j)_{j=0}^\infty$. Wir werden nun für den Rest des Abschnittes $F\mu_{S^{n-1}}$ mit m bezeichnen. Wir zerlegen m in die Anteile $m_j := \varphi_j m$ und definieren

$$(\mathscr{M}_j f)(x) := \sup_{t>0} \big| F^{-1}\big(m_j(t\cdot)Ff\big)(x)\big| \tag{2.2.1}$$

für $f \in L_1(\mathbb{R}^n) + L_2(\mathbb{R}^n)$. Weil $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \varphi_j = 1$ ist, gilt

$$m(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} m_j(\xi),$$

und daraus folgt

$$\mathscr{M} f \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mathscr{M}_j f.$$

Lemma 2.2.3. *Es gibt eine Konstante $C_{p,n}$, so dass für alle $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq 2$, gilt:*

$$\|\mathscr{M}_0 f | L_p(\mathbb{R}^n)\| \leq C_{p,n} \|f | L_p(\mathbb{R}^n)\|.$$

Beweis. Wegen $m_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist $F^{-1} m_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, was insbesondere bedeutet, dass $F^{-1} m_0$ eine radial fallende, integrierbare Majorante besitzt. Damit sind die Voraussetzungen für Satz 1.4.2 erfüllt und wir können mit den Eigenschaft (ii) und (iv) aus Satz 1.5.3 rechnen:

$$\sup_{t>0} \big| F^{-1}\big(m_0(t\cdot) F f\big)(x)\big| = \sup_{t>0} \big| \big(f * (F^{-1} m_0)_t\big)(x)\big| \leq C_n (Mf)(x).$$

Wegen der Beschränktheit des Maximaloperators (Satz 1.4.1(ii) oder Satz 2.1.1 mit $B = \{x \colon |x| < 1\}$) folgt daraus

$$\|\mathscr{M}_0 f | L_p(\mathbb{R}^n)\| \leq C_{p,n} \|f | L_p(\mathbb{R}^n)\|$$

für $1 < p \leq 2$. □

Um diese Ungleichung auch für $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mathscr{M}_j f$ zu erhalten, werden wir nun zeigen, dass die $\mathscr{M}_j$ für $j \geq 1$ auf solche Weise L_p-beschränkt sind, dass die Schranken schnell genug in j fallen, damit die Reihe konvergiert. Dazu wird in den folgenden Lemmas zunächst die L_2- und die schwache L_1-Beschränktheit gezeigt.

Lemma 2.2.4. *Es gibt eine Konstante C, so dass für jedes $j \geq 1$ die Abschätzung*

$$\|\mathscr{M}_j f | L_2(\mathbb{R}^n)\| \leq C 2^{(1-\frac{n}{2})j} \|f | L_2(\mathbb{R}^n)\|$$

für alle $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Beweis. Wir definieren für $j \geq 1$

$$(G_j f)(x) = \left(\int_0^\infty |(A_{j,t} f)(x)|^2 \, \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei $(A_{j,t}f)(x) = F^{-1}\big(m_j(t\cdot)Ff\big)(x)$. Weiter definieren wir

$$\widetilde{m}_j(\xi) = \sum_{k=1}^n \xi_k \frac{dm_j}{d\xi_k}(\xi) = \langle \xi, \nabla m_j(\xi) \rangle, \qquad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

und

$$(\widetilde{G}_j f)(x) = \left(\int_0^\infty |(\widetilde{A}_{j,t} f)(x)|^2 \, \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}},$$

mit $(\widetilde{A}_{j,t}f)(x) = F^{-1}\big(\widetilde{m}_j(t\cdot)Ff\big)(x)$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
t\,\frac{d(A_{j,t}f)(x)}{dt} &= t \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \frac{dm_j(t\xi)}{dt} Ff(\xi)\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \langle t\xi, \nabla m_j(t\xi) \rangle Ff(\xi)\, d\xi \\
&= F^{-1}\big(\widetilde{m}_j(t\cdot)Ff\big)(x) \\
&= \widetilde{A}_{j,t} f(x).
\end{aligned}$$

Da $j \geq 1$ ist, gilt $\lim\limits_{s \to 0} A_{j,s} f = 0$, und wir können schreiben:

$$\begin{aligned}
\big(A_{j,t}f\big)^2(x) &= 2 \int_0^t \big(A_{j,s}f\big)(x) s \frac{d\big(A_{j,s}f\big)(x)}{ds} \, \frac{ds}{s} \\
&= 2 \int_0^t \big(A_{j,s}f\big)(x) \big(\widetilde{A}_{j,s}f\big)(x) \, \frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Abschätzung

$$|\big(A_{j,t}f\big)(x)|^2 \leq 2 \int_0^\infty |\big(A_{j,s}f\big)(x)| |\big(\widetilde{A}_{j,s}f\big)(x)| \, \frac{ds}{s}$$

für alle $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Nun bilden wir das Supremum über alle $t > 0$ und integrieren über $\mathbb{R}^n$. So erhalten wir mit zweimaliger Anwendung der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{M}_j f|L_2(\mathbb{R}^n)\|^2 &\le 2\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty |\big(A_{j,s}f\big)(x)\big(\widetilde{A}_{j,s}f\big)(x)|\,\frac{ds}{s}\,dx \\
&\le 2\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^\infty |\big(A_{j,s}f\big)(x)|^2\,\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty |\big(\widetilde{A}_{j,s}f\big)(x)|^2\,\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{2}} dx \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^n}(G_jf)(x)(\widetilde{G}_jf)(x)\,dx \\
&\le 2\|G_jf|L_2(\mathbb{R}^n)\|\|\widetilde{G}_j|L_2(\mathbb{R}^n)\|.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Ungleichung aus Lemma 2.2.1 und unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Träger von m_j und $\widetilde{m}_j$ in $\{\xi\colon 2^{j-1}\le|\xi|\le 2^{j+1}\}$ enthalten sind, erhält man $\|m_j|L_\infty(\mathbb{R}^n)\| \le 2^{-j\frac{n-1}{2}}$ und $\|\widetilde{m}_j|L_\infty(\mathbb{R}^n)\| \le 2^{j(1-\frac{n-1}{2})}$. Nun können wir Lemma 2.2.2 anwenden. Es ergeben sich die Abschätzungen

$$\|G_jf|L_2(\mathbb{R}^n)\| \le 2^{-j\frac{n-1}{2}}\sqrt{\log 2}\|f|L_2(\mathbb{R}^n)\|$$

und

$$\|\widetilde{G}_jf|L_2(\mathbb{R}^n)\| \le 2^{j(1-\frac{n-1}{2})}\sqrt{\log 2}\|f|L_2(\mathbb{R}^n)\|.$$

Damit haben wir die Ungleichung

$$\|\mathscr{M}_jf|L_2(\mathbb{R}^n)\|^2 \le (2\log 2)2^{j(2-n)}\|f|L_2(\mathbb{R}^n)\|^2$$

und das Lemma mit $C=\sqrt{2\log 2}$ bewiesen. □

Lemma 2.2.5. *Es gibt eine Konstante C_n, so dass für jedes $j\ge 1$ die Abschätzung*

$$\|\mathscr{M}_jf|w-L_1(\mathbb{R}^n)\| \le C_n2^j\|f|L_1(\mathbb{R}^n)\|$$

für alle $f\in L_1(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Beweis. Wie in Lemma 2.2.3 können wir $\mathscr{M}_j$ für $f\in L_1(\mathbb{R}^n)$ schreiben als

$$\big(\mathscr{M}_jf\big)(x) = \sup_{t>0}\big|F^{-1}\big(m_j(t\cdot)Ff\big)(x)\big| = \sup_{t>0}\big|\big((F^{-1}m_j)_t * f\big)(x)\big|,$$

wobei wieder $(F^{-1}m_j)_t(\xi) = \frac{1}{t^n}(F^{-1}m_j)(\frac{\xi}{t})$ ist.

Die Idee des Beweises ist, Satz 1.4.2 anzuwenden, um die Abschätzung

$$\mathscr{M}_jf \le C_n2^jMf$$

zu gewinnen. Mit der schwachen $(1,1)$-Ungleichung von M aus Satz 1.4.1 (i) ist das Lemma dann bewiesen.

Dafür müssen wir eine radial fallende, integrierbare Majorante von $F^{-1}m_j$ finden, deren L_1-Norm ein konstantes Vielfaches von 2^j ist. Deshalb wollen wir nun zeigen, dass es ein $N_0 > n$ und eine Konstante $C_n > 0$ gibt, so dass

$$\big|\big(F^{-1}m_j\big)(x)\big| \leq \frac{C_n 2^j}{(1+|x|)^{N_0}}.$$

Mit $\varphi(\xi) := \varphi_0(\xi) - \varphi_0(2\xi)$ ist $\varphi_j = \varphi(2^{-j}\cdot)$. Da $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und somit auch $F^{-1}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist, gibt es für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $C_N > 0$, so dass

$$\begin{aligned}\big|\big(F^{-1}m_j\big)(x)\big| &= \Big|\int_{R^n} e^{2\pi i\langle\xi,x\rangle}\varphi_j(\xi)m(\xi)\,d\xi\Big| \\ &= \Big|\int_{S^{n-1}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_j(\xi)e^{2\pi i\langle\xi,x-y\rangle}\,d\xi\,d\mu_{S^{n-1}}(y)\Big| \\ &= \Big|\int_{S^{n-1}}\big(F^{-1}\varphi_j\big)(x-y)\,d\mu_{S^{n-1}}(y)\Big| \\ &= \Big|\int_{S^{n-1}} 2^{jn}\big(F^{-1}\varphi\big)(2^j(x-y))\,d\mu_{S^{n-1}}(y)\Big| \\ &\leq C_N\int_{S^{n-1}}\frac{2^{jn}}{(1+2^j|x-y|)^N}\,d\mu_{S^{n-1}}(y).\end{aligned}$$

Wir zerlegen das letzte Integral, indem wir S^{n-1} zerlegen. Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$S_{-1} := S^{n-1} \cap \{y \in \mathbb{R}^n \colon 2^j|x-y| \leq 1\}$$

und

$$S_r := S^{n-1} \cap \{y \in \mathbb{R}^n \colon 2^r < 2^j|x-y| \leq 2^{r+1}\} \qquad (r \in \mathbb{N}_0).$$

Für die weitere Rechnung benötigen wir folgende Überlegung. Wir bezeichnen mit $B(x,R)$ die offene Kugel mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Konstante c_n, so dass gilt

$$\mu_{S^{n-1}}\big(S^{n-1} \cap B(x,R)\big) \leq c_n R^{n-1}.$$

Nun schätzen wir $\left|\left(F^{-1}m_j\right)(x)\right|$ weiter ab:

$$\begin{aligned}
&C_N \int_{S^{n-1}} \frac{2^{jn}}{(1+2^j|x-y|)^N}\, d\mu_{S^{n-1}}(y)\\
&= C_N \sum_{r=-1}^{j} \int_{S_r} \frac{2^{nj}}{(1+2^j|x-y|)^N}\, d\mu_{S^{n-1}}(y) + C_N \sum_{r=j+1}^{\infty} \int_{S_r} \frac{2^{nj}}{(1+2^j|x-y|)^N}\, d\mu_{S^{n-1}}(y)\\
&\le C_N' 2^{nj} \left[\sum_{r=-1}^{j} \frac{\mu_{S^{n-1}}(S_r)\chi_{B(0,5)}(x)}{2^{rN}} + \sum_{r=j+1}^{\infty} \frac{\mu_{S^{n-1}}(S_r)\chi_{B(0,2^{r-j+2})}(x)}{2^{rN}} \right]\\
&\le C_N' 2^{nj} \left[\sum_{r=-1}^{j} \frac{c_n 2^{(r-j+1)(n-1)}\chi_{B(0,5)}(x)}{2^{rN}} + \sum_{r=j+1}^{\infty} \frac{c_n 2^{(r-j+1)(n-1)}\chi_{B(0,2^{r-j+2})}(x)}{2^{rN}} \right]\\
&\le C_{N,n} \left[2^j \chi_{B(0,5)}(x) + 2^{(n-N)j} \sum_{s=1}^{\infty} 2^{(n-1-N)s} \chi_{B(0,2^{s+2})}(x) \right]\\
&\le C_{N,n}' \left[2^j \chi_{B(0,5)}(x) + \frac{1}{(1+|x|)^{N-n+1}} \right]\\
&\le \frac{C_{N,n}'' 2^j}{(1+|x|)^{N-n+1}}.
\end{aligned}$$

Wählt man nun z.B. $N = 2n$, so erhält man die benötigte Abschätzung. □

Satz 2.2.1. *Für $n \ge 3$ und $p > \frac{n}{n-1}$ ist*

$$\|\mathscr{M}^n f | L_p(\mathbb{R}^n)\| \le A_{n,p} \|f | L_p(\mathbb{R}^n)\|.$$

Bemerkung. Der Satz gilt auch für $n = 2$ und $p > 2$. Dies wurde 1986 von J. Bourgain [1] bewiesen, ist aber deutlich komplizierter und wird hier nicht benötigt.

Beweis. Wir haben in Lemma 2.2.4 die L_2-Beschränktheit von $\mathscr{M}_j$ mit der Konstanten $2^{(1-\frac{n}{2})j}$ und in Lemma 2.2.5 für L_1 die Konstante 2^j bewiesen. Da die Operatoren $\mathscr{M}_j$ auf $L_1(\mathbb{R}^n) + L_2(\mathbb{R}^n)$ definiert und sublinear sind, können wir Satz 1.3.1 anwenden und interpolieren. So bekommen wir die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{M}_j f | L_p(\mathbb{R}^n)\| &\le 2^{j \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}} 2^{j(1-\frac{n}{2})\frac{1-\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{2}}} \|f | L_p(\mathbb{R}^n)\|\\
&= C_p 2^{(\frac{n}{p}-(n-1))j} \|f | L_p(\mathbb{R}^n)\|
\end{aligned}$$

für $1 < p \le 2$ und $j \ge 1$. Für $j = 0$ haben wir eine entsprechende Ungleichung auch schon gezeigt.

Nun kann man schreiben:

$$\|\mathscr{M}f|L_p(\mathbb{R}^n)\| \le \sum_{j=0}^{\infty}\|\mathscr{M}_jf|L_p(\mathbb{R}^n)\| \le C_p\left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{(\frac{n}{p}-(n-1))j}\right)\|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|.$$

Da die Reihe für $p > \frac{n}{n-1}$ konvergiert und $n \ge 3$ ist, haben wir jetzt die L_p-Beschränktheit von $\mathscr{M}$ für $\frac{n}{n-1} < p \le 2$ gezeigt. Das Gleiche gilt dann für den Operator $\mathscr{M}^n f = \frac{1}{\omega_{n-1}}\mathscr{M}f$.

Man sieht leicht, dass $\mathscr{M}^n$ genauso wie M beschränkt auf $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ und sublinear ist. Interpolieren wir zwischen $L_2(\mathbb{R}^n)$ und $L_\infty(\mathbb{R}^n)$, erhalten wir die Aussage des Satzes. $\square$

2.3 Die dimensionsunabhängige Maximalungleichung

Jetzt betrachten wir den Fall, dass B die offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ ist. Dann verwenden wir die Bezeichnung M für M_B. Es ist nun also

$$(Mf)(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{r^n v_n}\int_{|y|\le r}|f(x-y)|\,dy,$$

wobei $v_n = |\{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| \le 1\}|$ (vgl. Definitionen 1.4.1 und 2.1.1). In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass es für die Norm des n-dimensionalen Hardy-Littlewood-Operator M eine obere Schranke gibt, die nicht von n abhängt. Dazu benötigen wir die *sphärische Maximalfunktion* im $\mathbb{R}^k$. Später wird dann $k \le n$ gewählt. Diese Argumentation ist von Stein und Strömberg [10].

Wir definieren für $f \in L_p(\mathbb{R}^k)$ und $m \ge 0$ die *gewichtete Maximalfunktion* $M_{k,m}$ durch

$$M_{k,m}f(x) := \sup_{r>0}\frac{\int_{|y|\le r}|f(x-y)||y|^m\,dy}{\int_{|y|\le r}|y|^m\,dy} = \sup_{r>0}\frac{m+k}{\omega_{k-1}r^{m+k}}\int_{|y|\le r}|f(x-y)||y|^m\,dy,$$

wobei $\omega_{k-1} = \mu_{S^{k-1}}(S^{k-1})$ der Flächeninhalt der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^k$ ist.

Lemma 2.3.1. *Ist $k \ge 3$ und $p > \frac{k}{k-1}$ so gibt es eine Konstante $A_{k,p}$, die nicht von m abhängt, so dass*

$$\|M_{k,m}f|L_p(\mathbb{R}^k)\| \le A_{k,p}\|f|L_p(\mathbb{R}^k)\|$$

für alle $f \in L_p(\mathbb{R}^k)$ gilt.

Beweis. Mit Polarkoordinaten ($y = ty',\ t = |y|,\ y' \in S^{k-1}$) berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_{|y|\le r} |f(x-y)||y|^m\,dy &= \int_0^r \int_{S^{k-1}} |f(x-ty')|t^{m+k-1}\,d\mu_{S^{k-1}}(y')\,dt \\ &\le (\mathscr{M}^k f)(x)\omega_{k-1}\int_0^r t^{m+k-1}\,dt = (\mathscr{M}^k f)(x)\omega_{k-1}\frac{r^{m+k}}{m+k}\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Daraus folgt $(M_{k,m}f)(x) \le (\mathscr{M}^k f)(x)$. Mit Satz 2.2.1 folgt die Behauptung. □

Jetzt gehen wir über zum $\mathbb{R}^n,\ n \ge 3$ und zerlegen $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Wir bezeichnen die Elemente von $\mathbb{R}^n$ mit $x = (x_1, x_2)$ oder $y = (y_1, y_2)$, wobei $x_1, y_1 \in \mathbb{R}^k$ und $x_2, y_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$. Die Gruppe der Drehungen um den Koordinatenursprung im $\mathbb{R}^n$ nennen wir $SO(n)$.

Definition 2.3.1. Für $\tau \in SO(n)$ und $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, definieren wir

$$(M_k^\tau f)(x) := \sup_{r>0} \frac{\int_{|y_1|\le r} |f\big(x-\tau(y_1,0)\big)||y_1|^m\,dy_1}{\int_{|y_1|\le r}|y_1|^m\,dy_1},$$

wobei $m = n-k$.

Lemma 2.3.2. *Für $n \ge k \ge 3$ und $p > \frac{k}{k-1}$ gibt es ein $A_{k,p}$, so dass für alle $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\|M_k^\tau|L_p(\mathbb{R}^n)\| \le A_{k,p}\|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|.$$

Beweis. Es sei $n \ge k \ge 3$, $p > \frac{k}{k-1}$, $\tau \in SO(n)$ und $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$.

Wegen der Rotationsinvarianz des Lebesgue-Maßes gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\big(\tau(x)\big)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx$$

für integrierbare $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Mit

$$h(z) := \left|\sup_{r>0}\frac{\int_{|y_1|\le r}|f(z)||y_1|^m\,dy_1}{\int_{|y_1|\le r}|y_1|^m\,dy_1}\right|^p$$

gilt deshalb

$$\begin{aligned}\|M_k^\tau f|L_p(\mathbb{R}^n)\|^p &= \int_{\mathbb{R}^n} h\big(x-\tau(y_1,0)\big)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} h\big(\tau(x)-\tau(y_1,0)\big)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h\circ\tau\big(x-(y_1,0)\big)\,dx = \|M_k^I(f\circ\tau)|L_p(\mathbb{R}^n)\|^p,\end{aligned}$$

wobei I die identische Abbildung auf $\mathbb{R}^n$ ist. Da mit $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ auch $f \circ \tau \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ist, müssen wir nur den Fall $\tau = I$ betrachten.

Wir zerlegen $x = (x_1, x_2)$ mit $x_1 \in \mathbb{R}^k$ und $x_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$, um auf den k-dimensionalen Fall zurück zu kommen. Nun halten wir x_2 fest und definieren die Funktion $f_{x_2} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ durch $f_{x_2}(x_1) := f(x_1, x_2)$ für $x_1 \in \mathbb{R}^k$. Dann ist $(M_k^I f)(x_1, x_2) = (M_{k,m} f_{x_2})(x_1)$. Wendet man nun Lemma 2.3.1 auf f_{x_2} an, erhält man

$$\begin{aligned} \|M_k^I f|L_p(\mathbb{R}^n)\|^p &= \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \|M_{k,m} f_{x_2}|L_p(\mathbb{R}^k)\|^p \, dx_2 \\ &\leq A_{k,\,p}^p \int_{R^{n-k}} \|f_{x_2}|L_p(\mathbb{R}^k)\|^p \, dx_2 \\ &= A_{k,\,p}^p \|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|^p, \end{aligned}$$

und nach dem Ziehen der p-ten Wurzel ist das Lemma bewiesen. □

Das folgende Lemma arbeitet mit dem in Beispiel 1.1.2 besprochenen normierten Haar-Maß μ_H auf der Gruppe $SO(n)$ und dem Integral bezüglich μ_H.

Lemma 2.3.3. *Seien $n \geq k \geq 3$ und $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Dann gilt*

$$\sup_{r>0} \frac{1}{r^n v_n} \int_{|y| \leq r} |f(x-y)| \, dy \leq \int_{SO(n)} (M_k^\tau f)(x) \, d\mu_H(\tau).$$

Diese Abschätzung ist der wichtigste Punkt im Beweis der dimensionsunabhängigen Maximalungleichung. An dieser Stelle wird der Einfluss der Dimension n ausgeschaltet, weil man von n zu $k < n$ übergeht. Dieses k kann auf einem festen Wert gehalten werden, während n beliebig groß wird. Da das Haar-Maß auf 1 normiert ist, spielt n nun keine Rolle mehr.

Beweis. Für den Beweis des Lemmas benötigen wir die Formel

$$\frac{\int_{|y| \leq r} |f(y)| \, dy}{\int_{|y| \leq r} dy} = \frac{\int_{SO(n)} \int_{|y_1| \leq r} \left| f\big(\tau(y_1, 0)\big)\right| |y_1|^{n-k} \, dy_1 \, d\mu_H(\tau)}{\int_{|y_1| \leq r} |y_1|^{n-k} \, dy_1} \tag{2.3.1}$$

wobei wie oben $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^n$ mit $y_1 \in \mathbb{R}^k$ und $y_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$.

Wir beweisen (2.3.1) in einem ersten Schritt für Monome der Form $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n}$ wobei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex und $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ist. Wir zerlegen $y = ty'$ mit $t = |y|$ und $y' \in S^{n-1}$. Somit ist

$$y^\alpha = (ty')^\alpha = \left(t\, \frac{y_1}{t}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(t\, \frac{y_n}{t}\right)^{\alpha_n} = t^{|\alpha|}\, y'^\alpha$$

mit $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Für solche Monome lässt sich die linke Seite von (2.3.1) mit Hilfe der Polarkoordinaten aus Satz 1.1.4 bzw. Bemerkung 1.1 und dem sphärischen Lebesguemaß aus Definition 1.1.7 umformen:

$$\frac{\int_{|y|\le r} |y^\alpha|\, dy}{\int_{|y|\le r} dy} = \frac{\int_0^r t^{|\alpha|} t^{n-1}\, dt \cdot \int_{S^{n-1}} |(y')^\alpha|\, d\mu_{S^{n-1}}(y')}{r^n \omega_{n-1} n^{-1}}$$

wobei $\omega_{n-1} = \mu_{S^{n-1}}(S^{n-1})$ der Flächeninhalt der Einheitssphäre ist.

Um die rechte Seite der Formel (2.3.1) auf ähnliche Weise umzuformen, zerlegen wir $y_1 = t_1 y_1'$, wobei $t_1 = |y_1|$ und $y_1' \in S^{k-1}$. Dann zerfällt $\big[\tau(y_1, 0)\big]^\alpha = \big[\tau(t_1 y_1', 0)\big]^\alpha = t_1^{|\alpha|}\big[\tau(y_1', 0)\big]^\alpha$ und wir können schreiben:

$$\begin{aligned} &\frac{\int_{SO(n)} \int_{|y_1|\le r} \big|\big[\tau(y_1,0)\big]^\alpha\big| |y_1|^{n-k}\, dy_1\, d\mu_H(\tau)}{\int_{|y_1|\le r} |y_1|^{n-k}\, dy_1} \\ &\qquad = \frac{\int_0^r t_1^{|\alpha|} t_1^{n-1}\, dt_1 \cdot \int_{SO(n)} \int_{S^{k-1}} \big|\big[\tau(y_1',0)\big]^\alpha\big|\, d\mu_{S^{k-1}}(y_1')\, d\mu_H(\tau)}{r^n \omega_{k-1} n^{-1}}. \end{aligned}$$

Es bleibt also noch zu zeigen, dass

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} |(y')^\alpha|\, d\mu_{S^{n-1}}(y') = \frac{1}{\omega_{k-1}} \int_{SO(n)} \int_{S^{k-1}} \big|\big[\tau(y_1',0)\big]^\alpha\big|\, d\mu_{S^{k-1}}(y_1')\, d\mu_H(\tau). \tag{2.3.2}$$

Betrachten wir nun die rechte Seite von (2.3.2). Wir benutzen eine Hilfsfunktion $h\colon SO(n) \times S^{k-1} \to S^{n-1}$ mit $h(\tau, y_1') = \tau(y_1', 0)$ für $\tau \in SO(n)$ und $y_1' \in S^{k-1}$ um die beiden Integrale mit dem Satz von Fubini (siehe [4] Seite 67) als ein Integral bezüglich des Produktmaßes zu schreiben.

Dann wenden wir den Transformationssatz an, so dass wir ein Integral bezüglich des Bildmaßes von h erhalten:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\omega_{k-1}} \int_{SO(n)} \int_{S^{k-1}} \big|\big[h(\tau, y_1')\big]^\alpha\big|\, d\mu_{S^{k-1}}(y_1')\, d\mu_H(\tau) \\ &\qquad = \frac{1}{\omega_{k-1}} \int_{SO(n)\times S^{k-1}} \big|\big[h(\tau, y_1')\big]^\alpha\big|\, d(\mu_H \times \mu_{S^{k-1}})(\tau, y_1') \\ &\qquad = \frac{1}{\omega_{k-1}} \int_{S^{n-1}} |(y')^\alpha|\, d\big((\mu_H \times \mu_{S^{k-1}}) \circ h^{-1}\big)(y'). \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Da $h(SO(n) \times S^{k-1}) = S^{n-1}$, ergibt sich als Integrationsgebiet die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$.

Jetzt zeigen wir, dass das Maß $\mu^* := (\mu_H \times \mu_{S^{k-1}}) \circ h^{-1}$ rotationsinvariant ist. Dazu sei $A \in \mathscr{L}_{S^{n-1}}$ und $\sigma \in SO(n)$. Dann macht man eine Umformung analog zu (2.3.3) und erhält (χ_A ist die Indikatorfunktion der Menge A)

$$\mu^*\big(\sigma(A)\big) = \int_{S^{n-1}} \chi_{\sigma(A)}\, d\mu^* = \int_{SO(n)} \int_{S^{k-1}} \chi_{\sigma(A)}\big(\tau(y_1',0)\big)\, d\mu_{S^{k-1}}(y_1')\, d\mu_H(\tau)$$
$$= \int_{SO(n)} \int_{S^{k-1}} \chi_A\big(\sigma^{-1}\circ\tau(y_1',0)\big)\, d\mu_{S^{k-1}}(y_1')\, d\mu_H(\tau).$$

Wir fassen nun das ganze innere Integral als eine auf $SO(n)$ definierte Funktion an der Stelle $\sigma^{-1}\circ\tau$ auf. Da diese Funktion bezüglich des Haar-Maßes (siehe Beispiel 1.1.2) integriert wird, kann σ weggelassen werden und es ergibt sich $\mu^*\big(\sigma(A)\big) = \mu^*(A)$. Nach Bemerkung 1.1 ist also μ^* bis auf eine Konstante gleich $\mu_{S^{n-1}}$.

Weil μ_H auf 1 normiert ist gilt $\mu^*(S^{n-1}) = \int_{SO(n)} \int_{S^{k-1}} d\mu_{S^{k-1}}\, d\mu_H = \omega_{k-1}$ und somit ist $\frac{1}{\omega_{k-1}}\mu^* = \frac{1}{\omega_{n-1}}\mu_{S^{n-1}}$. Nun ist Gleichung (2.3.2) bewiesen und damit auch (2.3.1) für Monome.

Im zweiten Schritt übertragen wir die Gültigkeit von (2.3.1) auf beliebige Funktionen $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Dazu sei ein $r > 0$ und ein $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ vorgegeben. Dann ist auch $f \in L_p(B(0,r))$. Wegen der Linearität des Integrals gilt die Formel (2.3.1) nach dem ersten Schritt auch für Polynome. Da die Menge der Polynome auf $B(0,r)$ in $L_p(B(0,r))$ dicht liegt (siehe [13, S. 33]) können wir eine Folge von Polynomen $(p_i)_{i=1}^\infty$ mit $\|f - p_i|L_p(B(0,r))\| \to 0$ auswählen. Die Integrale in 2.3.1 lassen sich mit diesem Grenzwert vertauschen und da $r > 0$ beliebig war gilt die Formel auch für $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$.

Setzt man in (2.3.1) jetzt $f(x-y)$ für $f(y)$ ein, erhält man

$$\frac{1}{r^n v_n} \int_{|y|\le r} |f(x-y)|\, dy = \frac{\int_{SO(n)} \int_{|y_1|\le r} \big|f\big(x-\tau(y_1,0)\big)\big| |y_1|^{n-k}\, dy_1\, d\mu_H(\tau)}{\int_{|y_1|\le r} |y_1|^{n-k}\, dy_1}$$
$$= \int_{SO(n)} \frac{\int_{|y_1|\le r} \big|f\big(x-\tau(y_1,0)\big)\big| |y_1|^{n-k}\, dy_1}{\int_{|y_1|\le r} |y_1|^{n-k}\, dy_1}\, d\mu_H(\tau)$$
$$\le \int_{SO(n)} (M_k^\tau f)(x)\, d\mu_H(\tau)$$

mit $m = n - k$. Bildet man noch das Supremum über alle $r > 0$, ist das Lemma bewiesen. □

Satz 2.3.1. *Für $1 < p < \infty$ gilt*

$$\|Mf|L_p(\mathbb{R}^n)\| \le A_p \|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|$$

mit einer Konstanten A_p, die nicht von n abhängt.

Beweis. Sei p mit $1 < p < \infty$ vorgegeben. Ist $n \leq \frac{p}{p-1}$ oder $n \leq 2$, gilt die Ungleichung wegen Satz 2.1.1. Wenn aber $n \geq 3$ und $n > \frac{p}{p-1}$ zerlegen wir $n = k + m$, so dass k die kleinste natürliche Zahl größer als $\frac{p}{p-1}$ und 2 ist. Dann folgt mit Lemma 2.3.3 und Lemma 2.3.2

$$\begin{aligned}
\|Mf|L_p(\mathbb{R}^n)\| &\leq \left\| \int_{SO(n)} (M_k^\tau f)(\cdot)\, d\mu_H(\tau) \right| L_p(\mathbb{R}^n) \Big\| \\
&\leq \int_{SO(n)} \|M_k^\tau f|L_p(\mathbb{R}^n)\|\, d\mu_H(\tau) \\
&\leq \int_{SO(n)} A_{k,p}\|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|\, d\mu_H(\tau) \\
&= A_{k,p}\|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|.
\end{aligned}$$

Da k nur von p abhängt, ist der Satz mit $A_p = A_{k,p}$ bewiesen. $\square$

3 Vergleich mit anderen Maximalfunktionen

Nun wollen wir Maximalfunktionen betrachten, bei denen das Supremum nicht über eine zentrierte Kugel, sondern über beliebige Kugeln, zentrierte Würfel, oder unzentrierte Würfel gebildet wird. Diese werden wir mit M vergleichen und das Ergebnis aus Satz 2.3.1 benutzen, um im Hinblick auf die Dimension möglichst günstige Schranken zu erhalten.

Definition 3.0.2. Wir definieren für $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$

(i) $\big(M_u f\big)(x) = \sup\limits_{\substack{B \text{ Kugel} \\ B \ni x}} \frac{1}{|B|} \int\limits_B |f(y)|\, dy$ (unzentrierte Maximalfunktion),

(ii) $\big(\mathcal{M}^\tau f\big)(x) = \sup\limits_{r>0} \frac{1}{(2r)^n} \int\limits_{\tau(Q(x,r))} |f(y)|\, dy$ (zentrierte Maximalfunktion mit Würfeln einer festen „Verdrehung“ $\tau \in SO(n)$),

(iii) $\big(\mathcal{M} f\big)(x) = \sup\limits_{\substack{r>0 \\ \tau \in SO(n)}} \frac{1}{(2r)^n} \int\limits_{\tau(Q(x,r))} |f(y)|\, dy$ (zentrierte Maximalfunktion mit beliebig verdrehten Würfeln),

(iv) $\big(\mathcal{M}_u^\tau f\big)(x) = \sup\limits_{\substack{r>0 \\ \tau(Q(z,r)) \ni x}} \frac{1}{(2r)^n} \int\limits_{\tau(Q(z,r))} |f(y)|\, dy$ (unzentrierte Maximalfunktion mit Würfeln einer festen „Verdrehung“ $\tau \in SO(n)$),

(v) $\big(\mathcal{M}_u f\big)(x) = \sup\limits_{\substack{Q \text{ Würfel} \\ Q \ni x}} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(y)|\, dy$ (unzentrierte Maximalfunktion mit beliebigen (auch verdrehten) Würfeln).

Dabei bezeichne $Q(x,r)$ den Würfel $[x_1 - r, x_1 + r] \times \cdots \times [x_n - r, x_n + r]$ mit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. $SO(n)$ ist die Menge aller Rotationen um den Nullpunkt im $\mathbb{R}^n$.

Satz 3.0.2. *Sei $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ für $1 < p \leq \infty$. Dann gibt es eine Konstante A_p, so dass die folgenden Abschätzungen gelten.*

(i) $\|M_u|L_p(\mathbb{R}^n)\| \leq A_p 2^n \|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|$,

(ii) $\|\mathcal{M}^\tau|L_p(\mathbb{R}^n)\| \leq A_p\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n v_n \|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|$,

(iii) $\|\mathcal{M}|L_p(\mathbb{R}^n)\| \leq A_p\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n v_n \|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|$,

(iv) $\|\mathcal{M}_u^\tau|L_p(\mathbb{R}^n)\| \leq A_p n^{\frac{n}{2}} v_n \|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|$,

(v) $\|\mathcal{M}_u|L_p(\mathbb{R}^n)\| \leq A_p n^{\frac{n}{2}} v_n \|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|$.

Dabei bezeichnet v_n das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$.

Beweis. (i) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und B eine Kugel, die x enthält. Sei r der Radius von B. Um die Menge B auf eine Kugel zu vergrößern, die x als Mittelpunkt hat, muss man den doppelten Radius wählen: $B \subseteq B(x, 2r)$. Es gilt

$$\frac{1}{|B|}\int\limits_B |f(y)|\,dy \leq \frac{|B(x,2r)|}{|B|}\frac{1}{|B(x,2r)|}\int_{B(x,2r)} |f(y)|\,dy \leq 2^n\big(Mf\big)(x).$$

Nun bildet man das Supremum über alle Kugeln B mit $x \in B$ und erhält mit Satz 2.3.1 das Ergebnis.

(ii) Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in SO(n)$ und $r > 0$. Nun müssen wir die kleinste Kugel finden, die den Würfel $\tau(Q(x,r))$ enthält und ebenfalls x als Mittelpunkt hat. Unabhängig von τ muss man also $B(x, \sqrt{n}r)$ wählen und erhält

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2r)^n}\int\limits_{\tau(Q(x,r))} |f(y)|\,dy &\leq \frac{|B(x,\sqrt{n}r)|}{(2r)^n}\frac{1}{|B(x,\sqrt{n}r)|}\int_{B(x,\sqrt{n}r)} |f(y)|\,dy \\ &\leq \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n v_n\big(Mf\big)(x).\end{aligned}$$

Supremumsbildung bezüglich $r > 0$ und L_p-Normbildung liefert das Resultat.

(iii) Sei Q ein beliebig gedrehter Würfel mit $x \in Q$. Sei r die halbe Kantenlänge von Q. Nun kann man genauso wie in (ii) vorgehen und erhält das gleiche Ergebnis.

(iv), (v) Wir gehen genauso vor, wie bei (i)–(iii), nur dass wir eine Kugel suchen müssen, die einen nichtzentrierten Würfel enthält. Der Radius $2\sqrt{n}r$ ist der kleinste mögliche. $\square$

Bemerkung. Um die Beschränktheit von $\mathcal{M}^\tau$ zu zeigen, kann man auch den Satz 2.1.1 anwenden, da ein Würfel die dort geforderten Voraussetzungen erfüllt. Dann erhält man

$$\|\mathcal{M}^\tau f|L_p(\mathbb{R}^n)\| \leq n\frac{p}{p-1}\|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|.$$

Um die n-abhängigen Anteile der Konstanten besser vergleichen zu können, formen wir die Schranke aus Satz 3.0.2 mit $v_n = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ (Walter [12, S. 254]) um:

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n v_n = \frac{(n\pi)^{\frac{n}{2}}}{2^n\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{(\frac{n}{2e})^{\frac{n}{2}}\sqrt{n\pi}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \cdot \frac{(\frac{\pi e}{2})^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n\pi}}$$

Nach der Stirling'schen Formel (siehe Walter [11, S. 352]) konvergiert der erste Faktor für $n \to \infty$ gegen 1. Nun sieht man, dass die Schranke, die durch den Vergleich von Würfeln und Kugeln gewonnen wurde, für große n wesentlich schlechter ist, als die aus Satz 2.1.1. Der Vergleich von Würfeln mit Kugeln ist also nicht sehr effizient. Selbst wenn man einen gegebenen Würfel mit der kleinsten Kugel umschließt, die ihn noch enthält, hat man in hohen Dimensionen große Verluste.

Literaturverzeichnis

[1] J. Bourgain, *Averages in the plain over convex curves and maximal operators*, J. Analyse Math. **47** (1986), 69–85.

[2] J.-L. Rubio de Francia, *Maximal funcions and Fourier transforms*, Duke Math. J. **53** (1986), 305–404.

[3] Nelson Dunford und Jacob T. Schwartz, *Linear Operators. Part I: General Theory*, Wiley Classics Library Ausgabe, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 1988.

[4] Gerald B. Folland, *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*, 2. Auflage, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[5] Loukas Grafakos, *Classical and Modern Fourier Analysis*, Pearson Education, Inc., New Jersey, 2004.

[6] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, und G. Pólya, *Inequalities*, 2. Auflage, Cambridge University Press, Cambridge, 1952.

[7] Frédéric Riesz, *Sur un théorème de maximum de MM. Hardy et Littlewood*, J. London Math. Soc. **7** (1932), 10–13.

[8] Hans-Jürgen Schmeißer, *Höhere Analysis 1*, Vorlesung an der Friedrich-Schiller-Universität Jena im WS 2006/07.

[9] Elias M. Stein, *Maximal functions: Spherical means*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **73** (1976), no. 7, 2174–2175.

[10] Elias M. Stein und Jan-Olov Strömberg, *Behavior of maximal functions in $\mathbb{R}^n$ for large n*, Arkiv f. Math. **21** (1983), 259–269.

[11] Wolfgang Walter, *Analysis 1*, 6. Auflage, Springer, Berlin, 2001.

[12] ——, *Analysis 2*, 5., erweiterte Auflage, Springer, Berlin, 2002.

[13] Dirk Werner, *Funktionalanalysis*, 5. Auflage, Springer, Berlin, 2005.

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel verfasst habe.

Sämtliche Stellen, die anderen Werken entnommen sind, wurden unter Angabe der Quellen als Entlehnung kenntlich gemacht.