Ingo WITZKE, Köln

Mathematik – eine (naive) Naturwissenschaft im Schulunterricht?

1. Einleitung

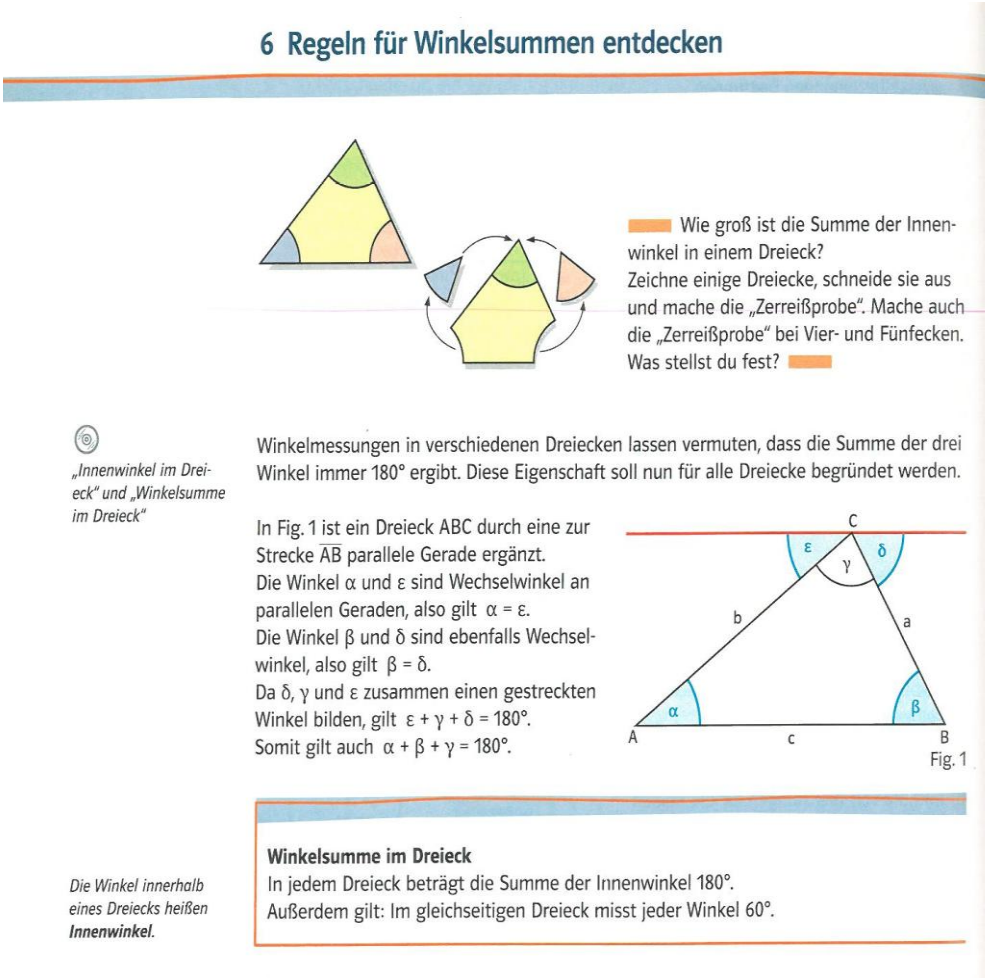
Ein beinahe klassisches Problem der didaktischen Forschung ist der gemeinhin als problematisch bezeichnete Übergang von der Schule zur Hochschule im Fach Mathematik. Aktuelle Forschungsstudien zeigen, dass Schülerinnen und Schüler diesen Übergang als besonders schwierig empfinden, da er mit einem Auffassungswechsel, der mit der Andersartigkeit der zu besprechenden Gegenstände einhergeht, verbunden ist.

In einer Vorstudie haben wir Studierenden des Studienganges GHR (Ende Grundstudium) sowie des gymnasialen Lehramtes (Hauptstudium) zu den von ihnen erlebten Gemeinsamkeiten und Unterschieden der Schul- und Hochschulmathematik befragt. Dabei ergab sich tendenziell ein Bild, dass auch L. Hefendehl-Hebeker im Rahmen des Projektes „Mathematik Besser Verstehen" beschrieben hat: „Die Studierenden fühlen sich zu Beginn ihres Studiums oft durch die Umstellung von der Schul- zur Universitätsmathematik – vor allem durch den sprunghaft ansteigenden Abstraktionsgrad – überfordert."

Die Studierenden machen, so die Deutung unserer Fragenbögen, eine klaren Unterscheidung zwischen Schule und Hochschule hinsichtlich der vermittelten Auffassung von Mathematik. Sie machen den Unterschied dabei an Begriffen wie Anschauung, Abstraktionsgrad, Beweisführung, formaler Strenge und axiomatischem Aufbau fest.

2. Schulbuchbeispiele

Eine Untersuchung von Schulbüchern im Vergleich zu Hochschultexten zeigt nun, dass der von den Studienanfängern zu vollziehende Auffassungswechsel ein erheblicher ist, der den Rang einer epistemischen Hürde zu haben scheint. Geht man mit der modernen Lernpsychologie davon aus, dass das mathematische Wissen von Individuen in einem konstruktiven Prozess der Auseinandersetzung mit den dargebotenen Lehrinhalten entsteht, erscheint es sinnvoll für diesen Zweck Mathematikbücher zu untersuchen. Bestimmt wird die Analyse dabei nicht von inhaltlichen Detailfragen sondern von der Frage nach der Auffassung von Mathematik die in modernen Schulbüchern vermittelt wird.



6 Regeln für Winkelsummen entdecken

Wie groß ist die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck?
Zeichne einige Dreiecke, schneide sie aus und mache die „Zerreißprobe". Mache auch die „Zerreißprobe" bei Vier- und Fünfecken.
Was stellst du fest?

„Innenwinkel im Dreieck" und „Winkelsumme im Dreieck"

Winkelmessungen in verschiedenen Dreiecken lassen vermuten, dass die Summe der drei Winkel immer 180° ergibt. Diese Eigenschaft soll nun für alle Dreiecke begründet werden.

In Fig. 1 ist ein Dreieck ABC durch eine zur Strecke $\overline{AB}$ parallele Gerade ergänzt.
Die Winkel α und ε sind Wechselwinkel an parallelen Geraden, also gilt $\alpha = \varepsilon$.
Die Winkel β und δ sind ebenfalls Wechselwinkel, also gilt $\beta = \delta$.
Da δ, γ und ε zusammen einen gestreckten Winkel bilden, gilt $\varepsilon + \gamma + \delta = 180°$.
Somit gilt auch $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Fig. 1

Winkelsumme im Dreieck
In jedem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel 180°.
Außerdem gilt: Im gleichseitigen Dreieck misst jeder Winkel 60°.

Die Winkel innerhalb eines Dreiecks heißen ***Innenwinkel****.*

Im aktuellen Lambacher Schweizer der Klasse 7 wird Mathematik augenscheinlich (hier am Beispiel der Innenwinkelsumme in Dreiecken) im Sinne einer naturwissenschaftlichen Theorie an Objekten der Empirie entwickelt. Die Objekte der Theorie sind hier Falt- und Zeichenblattfiguren, wie in der einleitenden „Zerreißprobe". Die Wissenssicherung – also die Einsicht, dass ein mathematischer Sachverhalt gilt (hier: Innenwinkelsumme = 180°) – geschieht durch Experimente an den Objekten der Empirie. Die Wissenserklärung erfolgt schließlich durch einen deduktiven Beweis (hier: Wechselwinkel) d.h. das neue Wissen wird innerhalb des Bezugsrahmens einer zusammenhängenden Theorie erklärt.

Dies ist ein Vorgehen das typisch ist für die benachbarten experimentellen Naturwissenschaften – man denke nur an die Wissensentwicklung z.B. im Rahmen der Newtonschen Mechanik. Das oben besprochene Schulbuchbeispiel erscheint uns dabei für den Charakter der im Schulunterricht vermittelten Auffassung von Mathematik durchaus typisch zu sein – selbst in der Oberstufe wird mathematisches Wissen an Objekten der Empirie entwickelt, so z.B. im Analysisunterricht an gegebenen Kurven (als Graphen von Funktionen).

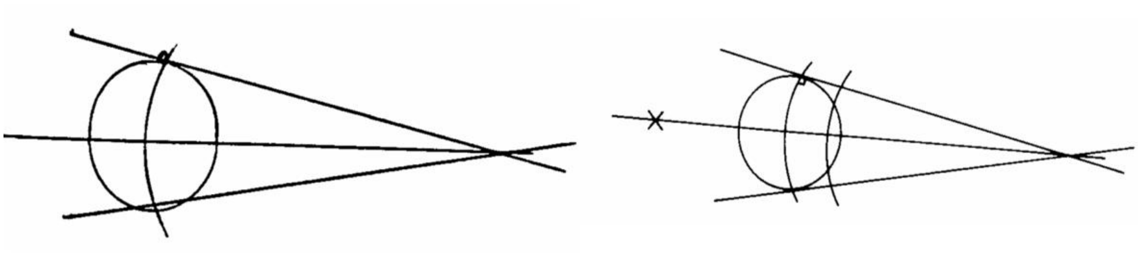
Ein Blick in die Geschichte zeigt, dass eine naturwissenschaftliche Auffassung im obigen Sinne eine tragfähige ist für einen großen Teil von Mathematik – so entwickelten z.B. Gottfried Wilhelm Leibniz, Johann Bernoulli u.a. herausragende Mathematiker den Differentialkalkül an Hand und zur Diskussion von Objekten der Empirie, für auf dem Zeichenblatt durch Konstruktion gegebene Kurven. Noch Ende des 19. Jhdts. sieht Moritz Pasch in „[…] der Geometrie nichts weiter […] als einen Theil der Naturwissenschaft."

Es spricht vieles nicht nur aus historischer, sondern auch aus bildungstheoretischer und kognitionspsychologischer Sicht dafür, dass die Schülerinnen und Schüler im Unterricht eine tragfähige naturwissenschaftliche Auffassung von Mathematik erwerben sollten – die sich grundsätzlich von der modernen formalistischen Auffassung von Mathematik unterscheidet die wir gemeinhin in fachmathematischen Veranstaltungen der Hochschulen vermitteln: Dort werden Aussagen über formal - abstrakte Entitäten getroffen, die sich gerade dadurch auszeichnen keinen Bezug zur Empirie zu brauchen. Veranschaulichungen sind hier höchstens heuristische Hilfsmittel, nicht aber Gegenstände der mathematischen Theorie.

3. Eine naiv-naturwissenschaftliche Auffassung von Mathematik

Wichtig für eine tragfähige naturwissenschaftliche Auffassung von Mathematik erscheint nun, dass es Wissenserklärungen (vgl. Oben) bedarf, da wir ansonsten die Schülerinnen und Schüler der Möglichkeit zur Argumentation berauben. Dies sei an einem Beispiel von A. Schoenfeld kurz illustriert:

A) B)



Figuren A) und B) zeigen zwei Lösungsvorschläge aus demselben Lösungsprotokoll. Die Aufgabe lautete zwischen zwei gegebenen sich in einem Punkt schneidenden Geraden einen Kreis zu konstruieren für den die beiden Geraden Tangenten sind. Dabei war ein Tangentialpunkt auf der oberen Gerade gegeben.

Im logischen Sinne sind die beiden obigen Lösungsvorschläge gleich (falsch): Die beiden Schüler nehmen als Kreismittelpunkt den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit einem Kreisbogen (Mittelpunkt = Schnittpunkt der Geraden) an. Die Schüler hingegen werten Lösung (A) als falsch und Lösung (B) als richtig, da sie entsprechend „aussehen“ – in (A) schneidet der Kreis die untere Gerade in zwei Punkten.

4. Fazit

Erwerben Schülerinnen und Schüler im Unterricht eine tragfähige – also nicht-naive – naturwissenschaftliche Auffassung von Mathematik, so erscheint auf erkenntnistheoretischer Ebene eine Diskussion der Wissensentwicklung in der Geschichte sinnvoll und notwendig. Beispielhaft haben wir eine systematische Diskussion der Regel von l'Hôpital – einem klassischen Lehrinhalt der Differential- und Integralrechnung – im Originalkontext angelegt, die in Kürze in den *Elementen der Mathematik* erscheinen wird. Hier wird klar, dass Leibniz und Bernoulli eine empirische Differential- und Integralrechnung entwickelten mit anderem Fokus als in einer modernen fachmathematischen Vorlesung. Schließlich legt unsere Analyse nahe, dass Schulmathematik – im naturwissenschaftlichen Sinne vermittelt und aufgefasst – eine vernünftige Mathematik ist. Diese ist aber wegen der empirischen Verortung der Grundbegriffe eine andere als die moderne Hochschulmathematik. Der „Abstraktionsschock“ ist mithin eine fast logische Konsequenz der sich nicht vermeiden aber (z. B. historisch) erklären lässt. Versuche einer Angleichung erscheinen beim Blick auf die historische Entwicklung problematisch. Wichtiger erschiene eine klare Diskussion der Auffassungsunterschiede und den damit verbundenen Konsequenzen.

Literatur

Hefendehl-Hebeker, L., Ableitinger, C., & Herrmann, A. (2010): Mathematik Besser Verstehen, In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Bd. I, S. 93-94.

Greulich, D., Jörgens, T. et al. (2008), Lambacher Schweizer Mathematik für Gymnasien (NRW), Stuttgart & Leipzig, Klett Verlag.

Pasch, M. (1882), Vorlesungen über neuere Geometrie (Reprint), Verlag Dr. Müller.

Struve, H. & Witzke, I. (Erscheint in Kürze): Zur historischen Entwicklung der Auffassung von Analysis am Beispiel der Regel von l'Hôpital, In: Elemente der Mathematik.

Schoenfeld, A., Mathematical Problem Solving (1985), Orlando, Academic Press.

Witzke, I. (2009): Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus. Eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik, Hildesheim, Verlag Franzbecker.